Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die ganz rationale Funktion 4. Grades:

$$f(x) = 4x^3 – 3x^4.$$

Untersuche die Funktion auf: Symmetrie, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen. Zeichne auf dieser Grundlage und unter Verwendung einer geeigneten Wertetabelle den Graphen der Funktion in ein x-y-Koordinatensystem ein.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer (für jede reelle Zahl x definierten) ganz rationalen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$
I. Ableitungen (nach Potenz- und Summenregel sowie Regel vom konstanten Faktor): $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ... + a_1$ $f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2$ $f'''(x) = n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3} + (n-1)(n-2)(n-3)a_{n-1}x^{n-4} + ... + 6a_3$
II. Nullstellen (Anzahl maximal n; Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), … (Nullstellen mit gerader Vielfachheit als Hoch-/Tiefpunkte ohne Vorzeichenwechsel; Nullstellen mit ungerader Vielfachheit mit Vorzeichenwechsel)
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Anzahl maximal n-1; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IV. Wendepunkte (Anzahl maximal n-2; Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))

Kurvendiskussion ganz rationaler Funktionen

Zusätzliche Punkte der Kurvendiskussion
V. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0)
VI. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0)

VII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie (zur y-Achse): $f(-x) = f(x)$ oder: nur gerade Exponenten im Term von $f(x)$ (gerade)
b) Punktsymmetrie (zum Ursprung): $f(-x) = -f(x)$ oder: nur ungerade Exponenten im Term von $f(x)$ (ungerade)
c) $f(x)$ achsensymmetrisch -> $f'(x)$ punktsymmetrisch -> $f''(x)$ achsensymmetrisch usw.
$f(x)$ punktsymmetrisch -> $f'(x)$ achsensymmetrisch -> $f''(x)$ punktsymmetrisch usw.

VIII. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \to \infty$, $x \to -\infty$) (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
$x \to \infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to \infty$
$x \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to \infty$

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
$x \to \infty$	$f(x) \to -\infty$	$f(x) \to -\infty$
$x \to -\infty$	$f(x) \to \infty$	$f(x) \to -\infty$

II. Symmetrie: Die Funktionskurve ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems. Wir sehen nämlich, dass

$f(-x) = 4(-x)^3 - 3(-x)^4 = -4x^3 - 3x^4$

gilt, was weder mit $f(x)$ (Achsensymmetrie) noch mit $-f(x)$ (Punktsymmetrie) übereinstimmt. Es können damit keine Rechenvorteile etwa bei der Bestimmung von Funktionswerten genutzt werden.

III. Als Grundlage für das Folgende bilden wir zunächst die Ableitungen (nach Summen-, Potenz- und Faktorregel):

$f'(x) = 12x^2 - 12x^3$
$f''(x) = 24x - 36x^2$
$f'''(x) = 24 - 72x.$

IV. Zur Nullstellenbestimmung rechnen wir:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x^4 = 0 \Leftrightarrow x^3(4-3x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0, 4-3x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 4 = 3x \Leftrightarrow x = 0, x = 4/3.$

(Ausklammern von x^3, Satz vom Nullprodukt). Nullstellen sind also: $N_1(0|0)$, $N_2(4/3|0)$.

V. Hoch- und Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung liefert die Stellen, wo die Funktion waagerechte Tangenten besitzt:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 12x^3 = 0 \Leftrightarrow x^2(12-12x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0, 12-12x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 12 = 12x \Leftrightarrow$
$x = 0, x = 1$

(Ausklammern von x^2, Satz vom Nullprodukt). Die Überprüfung dieser Stellen mit Hilfe der 2. Ableitung ergibt:

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ für $x = 0$ ist (zunächst) nicht entscheidbar, ob ein Extrem- oder auch ein Sattelpunkt vorliegt;
$f''(1) = -12 < 0 \Rightarrow x = 1$ als Hochpunkt $H(1|1)$ (mit $f(1) = 4-3 = 1$).

Mit $H(1|1)$ liegt also ein Hochpunkt der Funktion $f(x)$ vor.

VI. Wendepunkte: Wir setzen die 2. Ableitung Null und erhalten:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 24x - 36x^2 = 0 \Leftrightarrow x(24-36x) = 0 \Leftrightarrow x=0, 24-36x = 0 \Leftrightarrow x = 0, 24 = 36x \Leftrightarrow$
$x = 0, x = 2/3$

und erhalten $x = 0$, $x = 2/3$ als mögliche Wendestellen. Die Stelle $x = 0$ ist uns schon als Stelle mit waagerechter Tangente bekannt (siehe V.). Für $x = 0$ ergibt sich:

$f'''(0) = 24 > 0 \Rightarrow x = 0$ als Wendepunkt $W_1(0|0)$ (mit $f(0) = 0$) und als Punkt mit waagerechter Tangente $\Rightarrow x = 0$ als Sattelpunkt $W_1(0|0)$.

An der Stelle $x = 2/3$ liegt auf Grund von:

$f'''(2/3) = -24 < 0 \Rightarrow x = 2/3$ als Wendepunkt $W_2(2/3|16/27)$ (mit $f(2/3) = 32/27-16/27 = 16/27 \approx 0{,}59$)

der Wendepunkt $W_2(2/3|16/27)$ vor. Die beiden Wendepunkte der Funktion lauten also: $W_1(0|0)$, zudem als Nullstelle und Sattelpunkt; $W_2(2/3|16/27)$.

VII. Verhalten für betragsmäßig große x: Mit x^4 als gerader höchster Potenz der ganz rationalen Funktion und dem negativen Koeffizienten -3 ergibt sich:

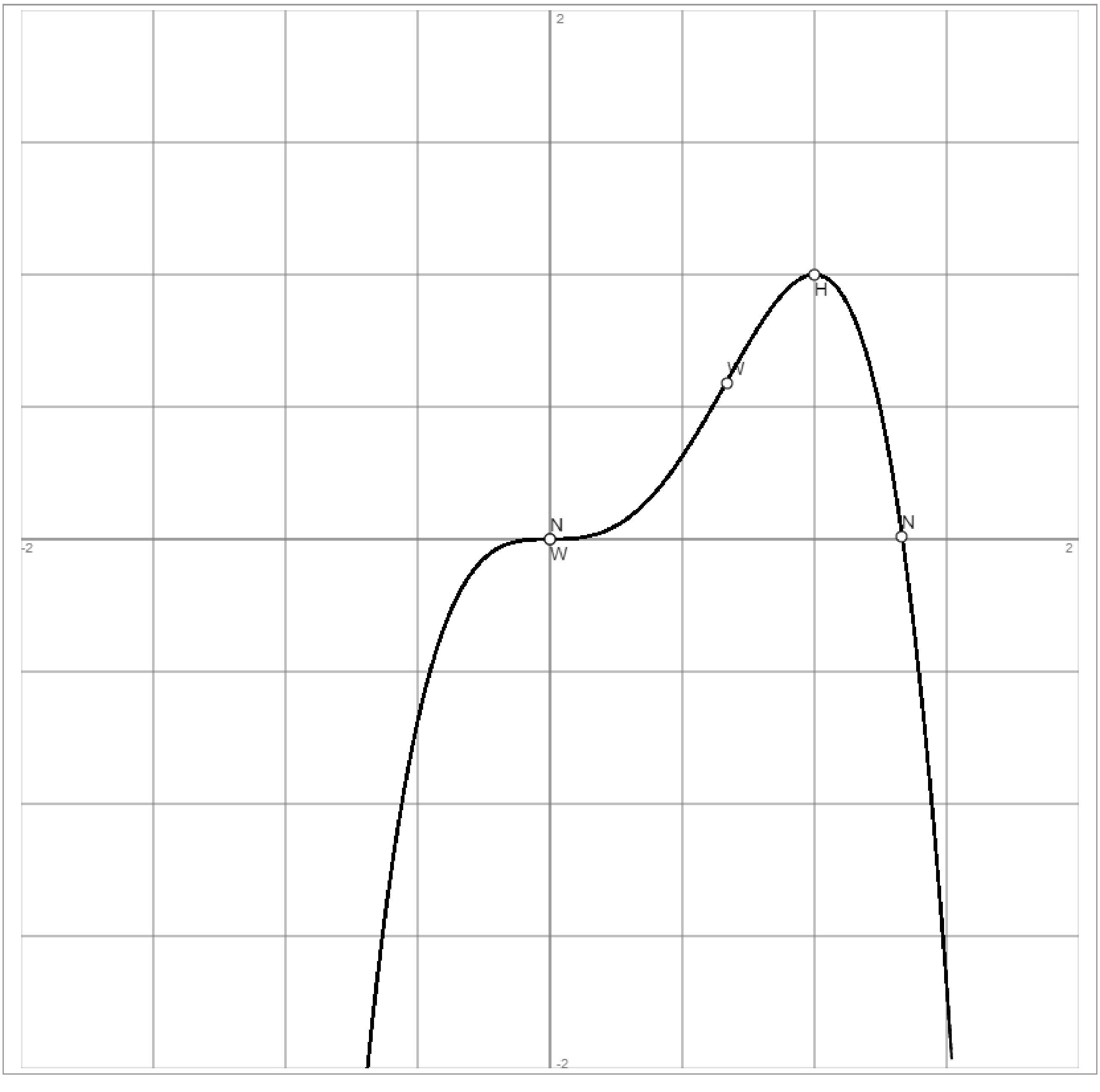
$x \to -\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty$
$x \to +\infty \Rightarrow f(x) \to -\infty.$

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-2	-80	144	-192	
-1.5	-28.6875	67.5	-117	
-1	-7	24	-60	
-0.5	-0.6875	4.5	-21	
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0) = Sattelpunkt W(0|0)
0.5	0.3125	1.5	3	
0.6666	0.5926	1.78	0	Wendepunkt W(0.67|0.59)
1	1	0	-12	Hochpunkt H(1|1)
1.3333	0	-7.08	-31.94	Nullstelle N(1.33|0)
1.5	-1.6875	-13.5	-45	
2	-16	-48	-96	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 911