Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die gebrochen rationale Funktion $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x-2}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Nullstellen, senkrechte und waagerechte Asymptoten sowie Lücken.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer gebrochen rationalen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Zentrale Punkte der Kurvendiskussion
Funktion: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x+b_0}=\frac{a_n(x-x_{N1})^{k_1}(x-x_{N2})^{k_2}\cdot ... \cdot R_1(x)}{b_m(x-x_{P1})^{kl}(x-x_{P2})^{k_l}\cdot ... \cdot R_2(x)}$
I. (Maximaler) Definitionsbereich, senkrechte Asymptoten (Polstellen), Nullstellen: a) Nenner = 0 -> $b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x+b_0=0$ -> x_{P1}, x_{P2}, … -> D_f = **R**\\{x_{P1}, x_{P2}, …} (Definitionsbereich) b) Zähler = 0 -> $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0=0$ -> x_{N1}, x_{N2}, … c) Auswertung: – Stimmt eine Nennernullstelle x_P mit einer Zählernullstelle x_N überein, so kann der Funktionsterm f(x) um den Faktor $(x-x_p)^l = (x-x_N)^k$ (l=k) zu f*(x) gekürzt werden; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle echt größer k, so liegt bei x_P eine senkrechte Asymptote vor; ist die Vielfachheit der Nennernullstelle kleiner gleich k, so liegt bei x_P eine Lücke mit Lückenwert $f^*(x_P)$ vor. – Ansonsten liegen bei x_{P1}, x_{P2}, … senkrechte Asymptoten mit Linearfaktor $(x-x_p)^l$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem l (mit Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->∞ (x->x_P, $x>x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->-∞ (x->x_P, $x>x_P$)), ohne Vorzeichenwechsel bei geradem l (ohne Vorzeichenwechsel bei senkrechter Asymptote x_P mit f(x)->-∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->-∞ (x->x_P, $x>x_P$) oder mit f(x)->∞ (x->x_P, $x<x_P$) und f(x)->∞ (x->x_P, $x>x_P$)). – Ansonsten liegen weiter bei x_{N1}, x_{N2}, … Nullstellen mit Linearfaktor $(x-x_p)^k$ vor, und zwar mit Vorzeichenwechsel bei ungeradem k, ohne Vorzeichenwechsel bei geradem k (Hoch-, Tiefpunkt).
II. Waagerechte Asymptote: Für x -> ±∞ gilt: $f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x+b_0} \begin{cases} \to 0 & \text{falls } n<m \\ \to \frac{a_n}{b_m} & \text{falls } n=m \\ \to \pm\infty & \text{falls } n>m \end{cases}$ Im Fall n>m ergibt sich (eventuell nach Polynomdivision) eine Grenzkurve y = $\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}+...$; die Näherungskurve ist eine schiefe Asymptote (Gerade) y = mx+c, wenn n=m+1 gilt.
III. Ableitungen (nach Quotientenregel; zuvor (wenn möglich) Funktionsterm f(x) zu f*(x) kürzen; bei Ableitungen gleiche Faktoren in allen Summanden des Bruchs kürzen; zu beachten sind Vorgehensweisen zum leichteren Ableiten, d.h.: Vermeidung der Quotientenregel bei konstantem Zähler und Anwendung der Kettenregel, Vermeidung der Quotientenregel z.B. bei gebrochen rationalen Funktionen mit Nenner als Potenz x^n und Anwendung der Potenzregel)
IV. Hochpunkte, Tiefpunkte (relative Extrema; Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f'(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) $f'(x_1) < 0$ -> $H(x_1\vert f(x_1))$ oder $f'(x_1) > 0$ -> $T(x_1\vert f(x_1))$; $f'(x_2) < 0$ -> $H(x_2\vert f(x_2))$ oder $f'(x_2) > 0$ -> $T(x_2\vert f(x_2))$; …
V. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\vert f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\vert f(x_2))$; …
Va. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach IV. und V.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\vert f(x_0))$

Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

II. Umformen der Funktionsvorschrift: Die gebrochen rationale Funktion f(x) kann wegen:
Zähler: $x^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = 1 \Leftrightarrow x = 1$ -> $(x^3-1):(x-1) = x^2+x+1$ (Polynomdivison) ->
$x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ (Faktorzerlegung)

Nenner: $x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$ ->
$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$ (Linearfaktorzerlegung)

auch durch Kürzen wie folgt umgeformt werden:

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+2)} = \frac{x^2 + x + 1}{x+2} \quad (*).$$

Die Umformung (*) bestimmt u.a. die folgenden Vorgehensweisen.

III. Definitionsbereich: Die Funktion $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+2)}$ ist dort nicht definiert, wo der Nenner des Bruchs verschwindet, also (s. II.):
$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -2$.
Der Definitionsbereich ist daher: $D_f = \mathbf{R} \backslash \{-2; 1\}$. An den Definitionslücken können dann (s. V., VI.) Polstellen (senkrechte Asymptoten) oder Funktionslücken auftreten.

IV. Nullstellen: Für die Bestimmung eventueller Nullstellen ist der Zähler des gekürzten Funktionsterms $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+2}$ relevant. Der Zählerterm x^2+x+1 ist aber überall positiv, so dass keine Nullstellen bestimmt werden können.

V. Senkrechte Asymptoten/Polstellen: Polstellen lassen sich gemäß (*) mit Hilfe des gekürzten Funktionsterms $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+2}$ erkennen. Denn der Linearfaktor des Nenners $x+2 = (x+2)^1$ hat bei x = -2 eine einfache (siehe Exponent des Linearfaktors) Nullstelle, so dass hier eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel vorliegt.

VI. Lücke: Der gekürzte Funktionsterm $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x+2} = f^*(x)$ hat den Definitionsbereich:
$D_{f^*} = \mathbf{R} \backslash \{-2\}$, der ursprüngliche Funktionsterm $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2}$ den Definitionsbereich
$D_f = \mathbf{R} \backslash \{-2; 1\}$. Wegen der Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktionen f(x) und f*(x) auf ihren jeweiligen Definitionsbereichen besitzt die Funktion f(x) an der Stelle x = 1 eine stetige Fortsetzung durch die Funktion f*(x). Es gilt daher:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = \lim_{x \to 1} f^*(x) = f^*(1) = \frac{1^2 + 1 + 1}{1 + 2} = \frac{3}{3} = 1.$$

An der Stelle x = 1 hat die Funktion f(x) eine Lücke als hebbare Unstetigkeitsstelle und ist damit stetig fortsetzbar mit stetig ergänztem Lückenwert f*(1) = 1.

VII. Schiefe Asymptote: Für betragsmäßig große x existiert eine schiefe Asymptote, die es geben muss, weil im Funktionsterm $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2+x-2}=\frac{x^2+x+1}{x+2}$ der Grad des Zählerpolynoms um 1 höher ist als der des Nennerpolynoms. Wir führen eine Polynomdivision durch und erhalten:

$(x^2+x+1):(x+2) = x - 1 - \frac{1}{x+2} = f(x)$

$\underline{-(x^2+2x)}$

$\quad -x+1$

$\quad \underline{-(-x+2)}$

$\qquad -1$

als weitere Darstellung der gebrochen rationalen Funktion. Nun gilt:

x->±∞ => 1/(x+2) -> 0,

so dass die Gerade y = x – 1 eine schiefe Asymptote zu f(x) ist.

VIII. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x) [f*(x)]**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-7	0.67	-0.22	
-4.5	-6.7	0.52	-0.38	
-4	-6.5	0.25	-0.75	
-3.733	-6.4641	0	-1.15	Hochpunkt H(-3.73|-6.46)
-3.5	-6.5	-0.33	-1.78	
-3	-7	-2	-6	
-2.5	-9.5	-11	-48	
-2	-Infinity	3000001	Infinity	Senkrechte Asymptote/Pol x = -2
-1.5	3.5	-11	48	
-1	1	-2	6	
-0.5	0.5	-0.33	1.78	
-0.268	0.4641	0	1.15	Tiefpunkt T(-0.27|0.46)
0	0.5	0.25	0.75	Schnittpunkt S_y(0|0.5)
0.5	0.7	0.52	0.38	
1	[1]	0.67	-	Lücke L(1|[1])
1.5	1.3571	0.76	0.14	
2	1.75	0.81	0.09	
2.5	2.1667	0.85	0.07	
3	2.6	0.88	0.05	
3.5	3.0455	0.9	0.04	
4	3.5	0.92	0.03	
4.5	3.9615	0.93	0.02	
5	4.4286	0.94	0.02	

Graphen (Funktion f(x); Funktion f*(x), schiefe Asymptote y)