Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{e^{0,5x}}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte sowie waagerechte Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) $x \to x_1$, $x > x_1$: $f(x) \to +\infty$, $x \to x_1$, $x < x_1$: $f(x) \to -\infty$ oder: $x \to x_1$, $x > x_1$: $f(x) \to -\infty$, $x \to x_1$, $x < x_1$: $f(x) \to +\infty$ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x \to x_2$, $x > x_2$: $f(x) \to +\infty$, $x \to x_2$, $x < x_2$: $f(x) \to +\infty$ oder: $x \to x_2$, $x > x_2$: $f(x) \to -\infty$, $x \to x_2$, $x < x_2$: $f(x) \to -\infty$ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x \to x_3$: $f(x) \to r$ => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit

Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞):
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. <u>Definitionsbereich</u>: Die Funktion $f(x)=\frac{x^2}{e^{0,5x}}$ ist auf den ganzen reellen Zahlen definiert, da der Nennerterm $e^{0,5x} > 0$ für alle reellen x ist. Auch lässt sich f(x) darstellen als: $f(x)=x^2e^{-0,5x}$.

III. <u>Nullstelle</u>: Für die Bestimmung eventueller Nullstellen gilt:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2e^{-0,5x} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$,
so dass sich an der Stelle x = 0 die einzige Nullstelle von f(x) befindet: N(0|0).

III. <u>Waagerechte Asymptote</u>: Für große positive x gilt:
x->+∞ => f(x) -> 0 = y,
so dass die x-Achse y = 0 eine waagerechte Asymptote zu f(x) ist.

IV. <u>Ableitungen</u>: Die ersten drei Ableitungen zu $f(x)=\frac{x^2}{e^{0,5x}}=x^2e^{-0,5x}$ gemäß der wiederholten Anwendung der Produktregel:

$$f'(x)=2xe^{-0,5x}+x^2(-0,5e^{-0,5x})=(2x-0,5x^2)e^{-0,5x}$$
$$f''(x)=(2-x)e^{-0,5x}+(2x-0,5x^2)(-0,5e^{-0,5x})=(2-x-x+0,25x^2)e^{-0,5x}=(2-2x+0,25x^2)e^{-0,5x}$$

$f'''(x) = (-2+0{,}5x)e^{-0{,}5x} + (2-2x+0{,}25x^2)(-0{,}5e^{-0{,}5x}) =$
$(-2+0{,}5x-1+x-0{,}125x^2)e^{-0{,}5x} = (-3+1{,}5x-0{,}125x^2)e^{-0{,}5x}$.

VIII. Extrempunkte: Wir setzen die 1. Ableitung gleich Null und erhalten:

$f'(x) = (2x-0{,}5x^2)e^{-0{,}5x}$ ⇔ 2x – 0,5x^2 = 0 ⇔ x(2–0,5x) = ⇔ x = 0, 2–0,5x = 0 ⇔ x = 0, 2 = 0,5x ⇔ x=0, x = 4.

Einsetzen von x = 0 in die 2. Ableitung ergibt dann:

$f''(0) = 2e^0 = 2 > 0$

und damit einen Tiefpunkt von f(x) mit f(0) = 0: T(0|0). Einsetzen von x = 4 in die 2. Ableitung ergibt:

$f''(4) = -7e^{-2} < 0$

und den Hochpunkt H(4|$\frac{16}{e^2}$) als weiteren Extrempunkt der Funktion..

IX. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung ergibt:

$f''(x) = (2-2x+0{,}25x^2)e^{-0{,}5x} = 0 \Leftrightarrow 0{,}25x^2 - 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 = 0 \Leftrightarrow$

$x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} = \frac{8\pm\sqrt{56}}{2} = \frac{8\pm 2\sqrt{14}}{2} = 4 \pm \sqrt{14}.$

Einsetzen der gefundenen x-Werte in die 3. Ableitung führt auf:

$f'''(4-\sqrt{14}) = (-2+0{,}5(4-\sqrt{14})e^{-0{,}5(4-\sqrt{14})} + 0 = -\sqrt{14}e^{-0{,}5(4-\sqrt{14})} \neq 0$
$f'''(4+\sqrt{14}) = (-2+0{,}5(4+\sqrt{14})e^{-0{,}5(4+\sqrt{14})} + 0 = \sqrt{14}e^{-0{,}5(4-\sqrt{14})} \neq 0$.

Wendepunkte von f(x) sind daher die Punkte: W_1($4-\sqrt{14}$ | $(30-8\sqrt{14})e^{-0{,}5(4-\sqrt{14})}$) und:
W_2($4+\sqrt{14}$ | $(30+8\sqrt{14})e^{-0{,}5(4+\sqrt{14})}$).

X. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	14841.3159	-10389	6975.44	
-9.5	10431.4817	-7411.9	5035.16	
-9	7291.3876	-5266.04	3623.2	
-8.5	5065.116	-3724.38	2598.29	
-8	3494.2816	-2620.73	1856.34	
-7.5	2391.8109	-1833.74	1320.82	
-7	1622.6571	-1274.96	935.52	
-6.5	1089.6419	-880.1	659.27	
-6	723.0793	-602.57	461.97	
-5.5	473.1896	-408.67	321.65	
-5	304.5623	-274.11	222.33	
-4.5	192.1267	-181.45	152.4	
-4	118.2249	-118.23	103.45	
-3.5	70.4939	-75.53	69.42	
-3	40.3352	-47.06	45.94	
-2.5	21.8146	-28.36	29.89	
-2	10.8731	-16.31	19.03	
-1.5	4.7633	-8.73	11.78	
-1	1.6487	-4.12	7.01	
-0.5	0.321	-1.44	3.93	
0	0	0	2	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Tiefpunkt T(0|0)

0.5	0.1947	0.68	0.83	
1	0.6065	0.91	0.15	
1.17	0.7626	0.92	0	Wendepunkt W(1.17|0.76)
1.5	1.0628	0.89	-0.21	
2	1.4715	0.74	-0.37	
2.5	1.7907	0.54	-0.41	
3	2.0082	0.33	-0.39	
3.5	2.1287	0.15	-0.34	
4	2.1654	0	-0.27	Hochpunkt H(4|2.17)
4.5	2.1343	-0.12	-0.2	
5	2.0521	-0.21	-0.14	
5.5	1.9338	-0.26	-0.09	
6	1.7923	-0.3	-0.05	
6.5	1.6382	-0.32	-0.02	
6.82	1.5368	-0.32	0	Wendepunkt W(6.82|1.54)
7	1.4797	-0.32	0.01	
7.5	1.3229	-0.31	0.02	
8	1.1722	-0.29	0.04	
8.5	1.0306	-0.27	0.04	
9	0.8998	-0.25	0.05	
9.5	0.7808	-0.23	0.05	
10	0.6738	-0.2	0.05	

Graph: