Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Symmetrie, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Asymptoten.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0$ -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0$ -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) $x\to x_1$, $x>x_1$: f(x) -> $+\infty$, $x\to x_1$, $x<x_1$: f(x) -> $-\infty$ oder: $x\to x_1$, $x>x_1$: f(x) -> $-\infty$, $x\to x_1$, $x<x_1$: f(x) -> $+\infty$ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x\to x_2$, $x>x_2$: f(x) -> $+\infty$, $x\to x_2$, $x<x_2$: f(x) -> $+\infty$ oder: $x\to x_2$, $x>x_2$: f(x) -> $-\infty$, $x\to x_2$, $x<x_2$: f(x) -> $-\infty$ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x\to x_3$: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f“(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f“(x_0)>0)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f‘(x) punktsymmetrisch -> f“(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f‘(x) achsensymmetrisch -> f“(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞):
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

a_n>0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

a_n<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ ist ein Quotient aus ganz rationalem Zähler und Nenner. Die Funktionsuntersuchung genügt folgender Vorgehensweise:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich D_f = **R**.

2) Verhalten für betragsmäßig große x: x -> -∞: f(x) -> +∞; x -> +∞: f(x) -> 0 mit y = 0 (x-Achse) als waagerechter Asymptote.

3) Symmetrie: f(x) ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung O(0|0) des x-y-Koordinatensystems, da der Zähler der Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung, der Nenner achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

4) Ableitungen werden nach der Quotientenregel gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x) = \dfrac{1\cdot(x^2+4) - x\cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

2. Ableitung: $f''(x) = \dfrac{-2x\cdot(x^2+4)^2 - (-x^2+4)\cdot 2(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \dfrac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$

3. Ableitung: $f''(x) = \dfrac{(6x^2-24)\cdot(x^2+4)^3 - (2x^3-24x)\cdot 3(x^2+4)^2\cdot 2x}{(x^2+4)^6} = \dfrac{-6x^4+144x^2-96}{(x^2+4)^4}$.

5) Nullstellen: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+4}$ = 0 -> x_1 = 0 -> Nullstelle N(0|0).

6) Tief-, Hochpunkte: $f'(x)=\dfrac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$ = 0 -> $-x^2+4$ = 0 -> 4 = x^2 -> x_1 = -2, mit: f''(-2) > 0, f(-2) = -0.25 -> Tiefpunkt T(-2|-0.25) bzw. x_2 = 2 mit: f''(2) < 0, f(2) = 0.25 -> Hochpunkt H(-2|0.25).

7) Wendepunkte: $f''(x)=\dfrac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$ = 0 -> $2x^3-24x$ = 0 -> $x(x^2-12)$ = 0 -> x_1 = $-\sqrt{12}=-2\sqrt{3}$ mit: f'''($-2\sqrt{3}$) ≠ 0, f($-2\sqrt{3}$) = $-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ -> Wendepunkt W_1($-2\sqrt{3}$ | $-\dfrac{\sqrt{3}}{8}$), x_2 = 0 mit: f''(0) ≠ 0, f(0) = 0 -> Wendepunkt W_2(0|0), x_3 = $2\sqrt{3}$ mit: f'''($2\sqrt{3}$) ≠ 0, f($2\sqrt{3}$) = $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ -> Wendepunkt W_3($2\sqrt{3}$ | $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$).

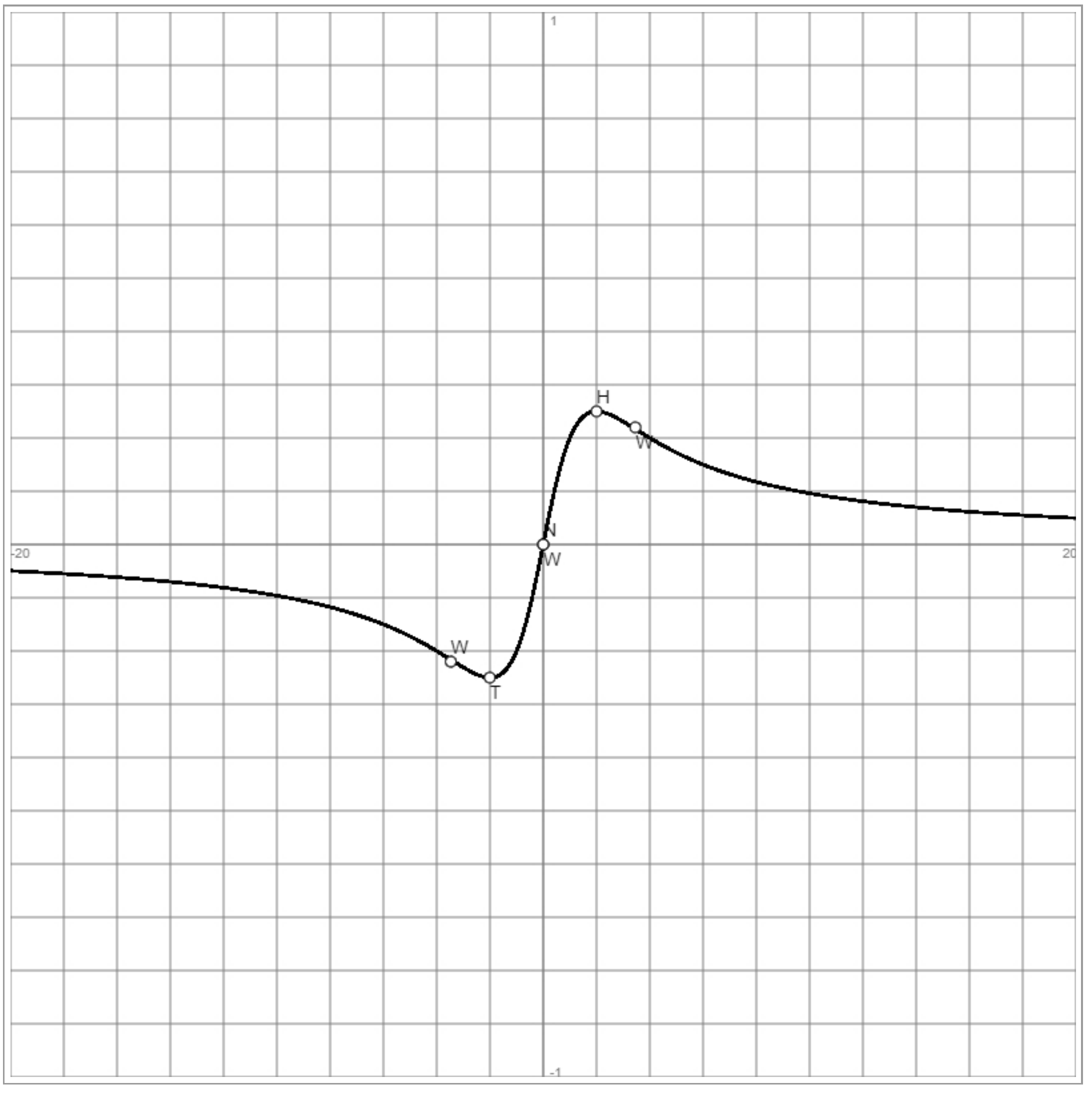
8) Polstellen sind nicht vorhanden, maximaler Definitionsbereich ist D_f = **R**.

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-20	-0.0495	0	0	
-19	-0.0521	0	0	
-18	-0.0549	0	0	
-17	-0.058	0	0	
-16	-0.0615	0	0	
-15	-0.0655	0	0	
-14	-0.07	0	0	
-13	-0.0751	-0.01	0	
-12	-0.0811	-0.01	0	
-11	-0.088	-0.01	0	
-10	-0.0962	-0.01	0	
-9	-0.1059	-0.01	0	
-8	-0.1176	-0.01	0	
-7	-0.1321	-0.02	0	
-6	-0.15	-0.02	0	
-5	-0.1724	-0.02	-0.01	
-4	-0.2	-0.03	0	
-3.465	-0.2165	-0.03	0	Wendepunkt W(-3.46|-0.22)
-3	-0.2308	-0.03	0.01	
-2.005	-0.25	0	0.06	Tiefpunkt T(-2|-0.25)
-2	-0.25	0	0.06	
-1	-0.2	0.12	0.18	
0	0	0.25	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0)
1	0.2	0.12	-0.18	
2	0.25	0	-0.06	Hochpunkt H(2|0.25)
3	0.2308	-0.03	-0.01	
3.46	0.2166	-0.03	0	Wendepunkt W(3.46|0.22)
4	0.2	-0.03	0	

5	0.1724	-0.02	0.01	
6	0.15	-0.02	0	
7	0.1321	-0.02	0	
8	0.1176	-0.01	0	
9	0.1059	-0.01	0	
10	0.0962	-0.01	0	
11	0.088	-0.01	0	
12	0.0811	-0.01	0	
13	0.0751	-0.01	0	
14	0.07	0	0	
15	0.0655	0	0	
16	0.0615	0	0	
17	0.058	0	0	
18	0.0549	0	0	
19	0.0521	0	0	
20	0.0495	0	0	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 11.2022 / Aufgabe 1742