Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 \ln x$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: f'(x), f''(x), f'''(x)
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> N(x_1|0), N(x_2|0), …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung f'(x) = 0 lösen, Lösungen in f''(x) einsetzen): a) f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f''(x_1) < 0 -> H(x_1|f(x_1)) oder f''(x_1) > 0 -> T(x_1|f(x_1)); f''(x_2) < 0 -> H(x_2|f(x_2)) oder f''(x_2) > 0 -> T(x_2|f(x_2)); …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung f'(x) = 0 lösen): f'(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> P_1(x_1|f(x_1)), P_2(x_2|f(x_2)), …
IV. Wendepunkte (Gleichung f''(x) = 0 lösen, Lösungen in f'''(x) einsetzen): a) f''(x) = 0 -> x_1, x_2, … b) f'''(x_1) ≠ 0 -> W(x_1|f(x_1)); f'''(x_2) ≠ 0 -> W(x_2|f(x_2)); …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) ≠ 0 -> S(x_0|f(x_0))
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) x->x_1, x>x_1: f(x) -> +∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> -∞ oder: x->x_1, x>x_1: f(x) -> -∞, x->x_1, x<x_1: f(x) -> +∞ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) x->x_2, x>x_2: f(x) -> +∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> +∞ oder: x->x_2, x>x_2: f(x) -> -∞, x->x_2, x<x_2: f(x) -> -∞ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) x->x_3: f(x) -> r => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit x_1 < x_2 < … < x_n, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall (-∞, x_1): f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, f'(x_0)>0) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, f'(x_0)<0); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie f'(x_0)>0); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie f'(x_0)<0) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, f'(x_0)>0) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit x_1 < x_2 < … < x_n, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall (-∞, x_1): f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, f''(x_0)>0) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, f''(x_0)<0); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f''(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f''(x_0)>0); … – Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit

Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f'(x) punktsymmetrisch -> f''(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f'(x) achsensymmetrisch -> f''(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x ($x\to\infty$, $x\to-\infty$) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n>0$	n ungerade	n gerade
$x\to\infty$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to\infty$
$x\to-\infty$	$f(x)\to-\infty$	$f(x)\to\infty$

$a_n<0$	n ungerade	n gerade
$x\to\infty$	$f(x)\to-\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to-\infty$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to-\infty$

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

$x\to\pm\infty$: $f(x)\to 0 = y$ ($n < m$)
$x\to\pm\infty$: $f(x)\to a/b = y$ ($n = m$; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
$x\to\pm\infty$: $f(x)\to\pm\infty$ ($n > m$)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, $y = e^x$, $D_y = \mathbf{R}$:

$x\to-\infty$: $e^x\to 0$, $x\to+\infty$: $e^x\to+\infty$
$x\to-\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \to \pm\infty$ ($b<0$), $\to d = y$ ($b>0$); $x\to+\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \to d = y$ ($b<0$), $\to\pm\infty$ ($b>0$)
$x\to-\infty$: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx}\to\pm\infty$ ($b<0$), $\to 0 = y$ ($b>0$); $x\to+\infty$: $f(x) = (a_nx^n+\ldots)e^{bx}\to 0 = y$ ($b<0$), $\to\pm\infty$ ($b>0$)

mit y als waagerechter Asymptote.

d) f(x) mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil; $y = \ln(x)$, $D_y = (0; +\infty)$:

$x\to 0$: $\ln(x)\to-\infty$, $x\to+\infty$: $\ln(x)\to+\infty$
$x\to 0$: $f(x) = x^a\ln(x)\to 0$ ($a>0$)
$x\to+\infty$: $f(x) = \ln(x)/x^a\to 0 = y$ ($a>0$)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = x^2 \ln x$ ist auch eine Funktion des natürlichen Logarithmus:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich D_f = (0; +∞).

2) Verhalten an den Randstellen des Definitionsbereichs: x -> 0: f(x) -> 0 (hebbare Unstetigkeitsstelle); x -> +∞: f(x) -> +∞.

3) Ableitungen werden nach der Potenz-, Faktor- und Produktregel gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x) = 2x\ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1)$

2. Ableitung: $f''(x) = 1 \cdot (2\ln x + 1) + x \cdot \frac{2}{x} = 2\ln x + 1 + 2 = 2\ln x + 3$

3. Ableitung: $f'''(x) = \frac{2}{x}$.

4) Nullstellen: $f(x) = x^2 \ln x$ = 0 -> [x_1 = 0 -> hebbare Unstetigkeitsstelle als „Nullstelle" N(0|0)], x_2 = 1 -> Nullstelle N(1|0).

5) Tief-, Hochpunkte: $f'(x) = x(2\ln x + 1)$ = 0 -> [x = 0], x = $e^{-1/2}$ = 0.6 mit: f''(0.6) > 0, f(0.6) = -0.18 -> Tiefpunkt T(0.6|-0.18).

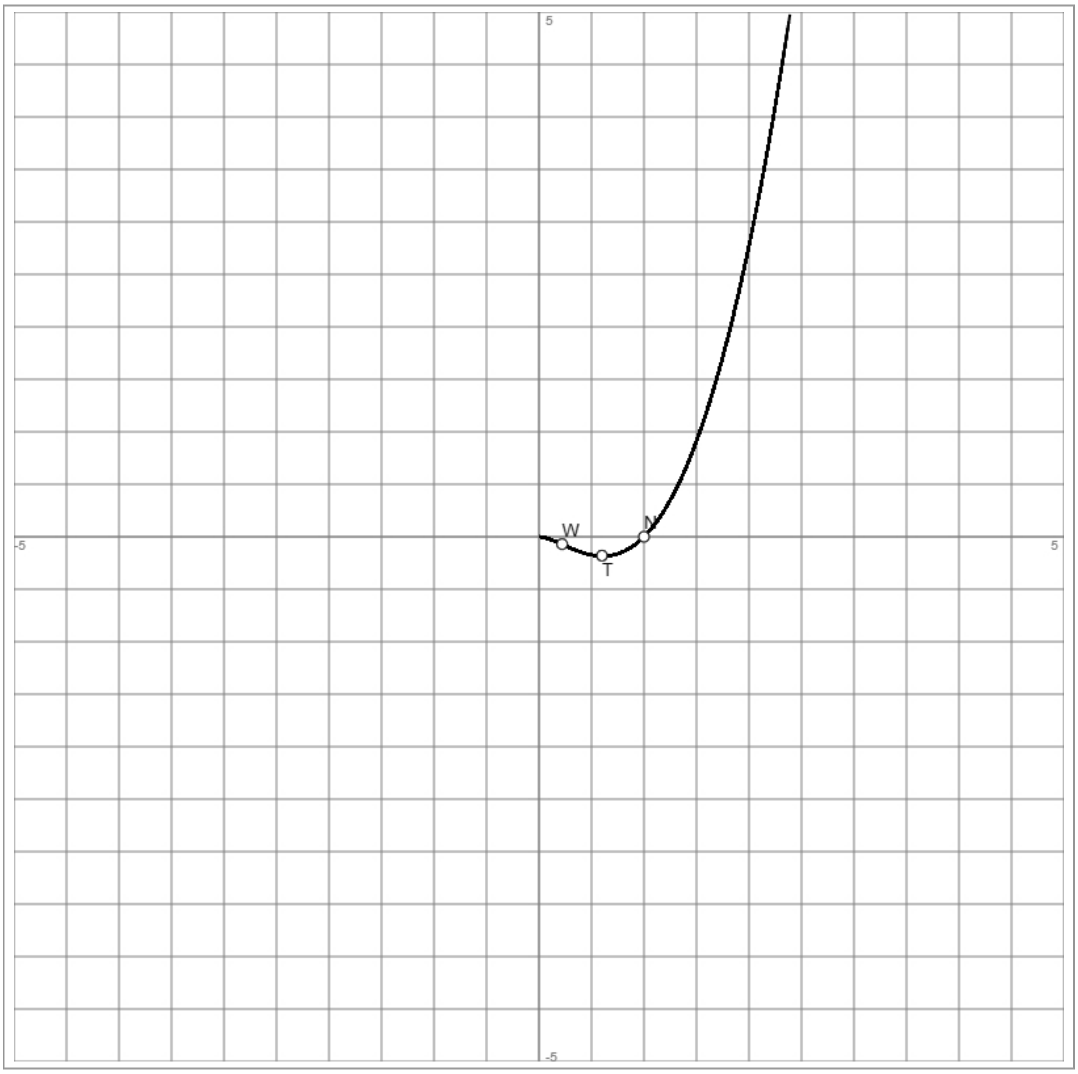
6) Wendepunkte: $f''(x) = 2\ln x + 3$ = 0 -> x = $e^{-3/2}$ = 0.22 mit: f'''(0.22) ≠ 0, f(0.22) = -0.07 -> Wendepunkt W(0.22|-0.07).

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
0	(0)	-	-	Hebbare Unstetigkeitsstelle N(0|0)
0.22	-0.0733	-0.45	-0.03	Wendepunkt W(0.22|-0.07)
0.5	-0.1733	-0.19	1.61	
0.6	-0.1839	-0.01	1.98	Tiefpunkt T(0.6|-0.18)
1	0	1	3	Nullstelle N(1|0)
1.5	0.9123	2.72	3.81	
2	2.7726	4.77	4.39	
2.5	5.7268	7.08	4.83	
3	9.8875	9.59	5.2	
3.5	15.3463	12.27	5.51	
4	22.1807	15.09	5.77	
4.5	30.4576	18.04	6.01	
5	40.2359	21.09	6.22	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1771