Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}\ln(x^2+4)$. Charakterisiere den Funktionsverlauf u.a. durch Untersuchung des Verhaltens für betragsmäßig große x, auf Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion f(x) die folgende <u>Vorgehensweise</u>:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: f: D_f -> **R** mit Funktionsterm y = f(x), D_f als maximale Definitionsmenge (als **R** [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nennernullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung f(x) = 0 lösen): f(x) = 0 -> x_1, x_2, … -> $N(x_1\|0)$, $N(x_2\|0)$, …
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x)$ = 0 lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x)$ = 0 -> x_1, x_2, … b) $f''(x_1) < 0$ -> $H(x_1\|f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0$ -> $T(x_1\|f(x_1))$; $f''(x_2) < 0$ -> $H(x_2\|f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0$ -> $T(x_2\|f(x_2))$; …
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x)$ = 0 lösen): $f'(x)$ = 0 -> x_1, x_2, … -> $P_1(x_1\|f(x_1))$, $P_2(x_2\|f(x_2))$, …
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x)$ = 0 lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x)$ = 0 -> x_1, x_2, … b) $f'''(x_1) \neq 0$ -> $W(x_1\|f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0$ -> $W(x_2\|f(x_2))$; …
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) \neq 0$ -> $S(x_0\|f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge D_f -> Randstellen der Definitionsmenge D_f => Definitionslücken x_1, x_2, x_3 … b) $x\to x_1$, $x>x_1$: $f(x) \to +\infty$, $x\to x_1$, $x<x_1$: $f(x) \to -\infty$ oder: $x\to x_1$, $x>x_1$: $f(x) \to -\infty$, $x\to x_1$, $x<x_1$: $f(x) \to +\infty$ => x_1 Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x\to x_2$, $x>x_2$: $f(x) \to +\infty$, $x\to x_2$, $x<x_2$: $f(x) \to +\infty$ oder: $x\to x_2$, $x>x_2$: $f(x) \to -\infty$, $x\to x_2$, $x<x_2$: $f(x) \to -\infty$ => x_2 Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x\to x_3$: $f(x) \to r$ => x_3 (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0)>0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0)<0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2): f(x) monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0)>0$); … – Monotonieintervall (x_n, ∞): f(x) monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0)<0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0)>0$) Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach [IV.]; bei Wendepunkten x_1, x_2, …, x_n mit $x_1 < x_2 < … < x_n$, x_0 als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: f(x) links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0)>0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0)<0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0)<0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0)>0$); …

– Krümmungsintervall (x_n, ∞): f(x) rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, f“(x_0)<0) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, f“(x_0)>0)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:
a) Achsensymmetrie zur y-Achse: f(-x) = f(x) (gerade)
b) Punktsymmetrie zum Ursprung: f(-x) = -f(x) (ungerade)
c) Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
d) Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
e) Es gilt für die Ableitungen einer Funktion f(x): f(x) achsensymmetrisch -> f‘(x) punktsymmetrisch -> f“(x) achsensymmetrisch usw.; f(x) punktsymmetrisch -> f‘(x) achsensymmetrisch -> f“(x) punktsymmetrisch usw.
f) Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x (x->∞, x->-∞) bzw. an den Randstellen des Definitionsbereichs:
a) f(x) als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

a_n>0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞
x->-∞	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞

a_n<0	n ungerade	n gerade
x->∞	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞
x->-∞	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞

b) f(x) als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

x -> ±∞: f(x) -> 0 = y (n < m)
x -> ±∞: f(x) -> a/b = y (n = m; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
x -> ±∞: f(x) -> ±∞ (n > m)

mit y als waagerechter Asymptote.

c) f(x) mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil, y = e^x, D_y = **R**:

x->-∞: e^x -> 0, x->+∞: e^x -> +∞
x->-∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> ±∞ (b<0), -> d = y (b>0); x-> +∞: f(x) = ae^{bx+c} + d -> d = y (b<0), -> ±∞ (b>0)
x->-∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> ±∞ (b<0), -> 0 = y (b>0); x-> +∞: f(x) = $(a_nx^n+\ldots)e^{bx}$ -> 0 = y (b<0), -> ±∞ (b>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

d) f(x) mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil; y = ln(x), D_y = (0; +∞):

x->0: ln(x) -> -∞, x-> +∞: ln(x) -> +∞
x->0: f(x) = x^aln(x) -> 0 (a>0)
x->+∞: f(x) = ln(x)/x^a -> 0 = y (a>0)

mit y als waagerechter Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)$ ist eine Funktion des natürlichen Logarithmus:

1) f(x) ist (stetig und) differenzierbar auf dem maximalen Definitionsbereich D_f = **R**.

2) Symmetrie: f(-x) = f(x) -> f(x) ist symmetrisch zur y-Achse.

3) Verhalten für betragsmäßig große x: x -> 0: f(x) -> -∞ (senkrechte Asymptote, Pol); x -> +∞: f(x) -> 0 = y (als waagerechte Asymptote).

4) Ableitungen werden u.a. nach der Ketten- und Quotientenregel gebildet: Funktion f(x) ->

1. Ableitung: $f'(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+4}\cdot 2x = \frac{x}{x^2+4}$

2. Ableitung: $f''(x) = \frac{1 \cdot (x^2+4) - x \cdot 2x}{(x^2+4)^2} = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$

3. Ableitung: $f'''(x) = \frac{-2x(x^2+4)^2 - (-x^2+4) \cdot 2(x^2+4) \cdot 2x}{(x^2+4)^4} = \frac{2x^3-24x}{(x^2+4)^3}$.

5) Nullstellen: $f(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+4)$ = 0 -> keine Lösung -> keine Nullstelle.

6) Tief-, Hochpunkte: $f'(x) = \frac{x}{x^2+4}$ = 0 -> x = 0 mit: f''(0) > 0, f(0) = ln(2) -> Tiefpunkt T(0|ln(2)).

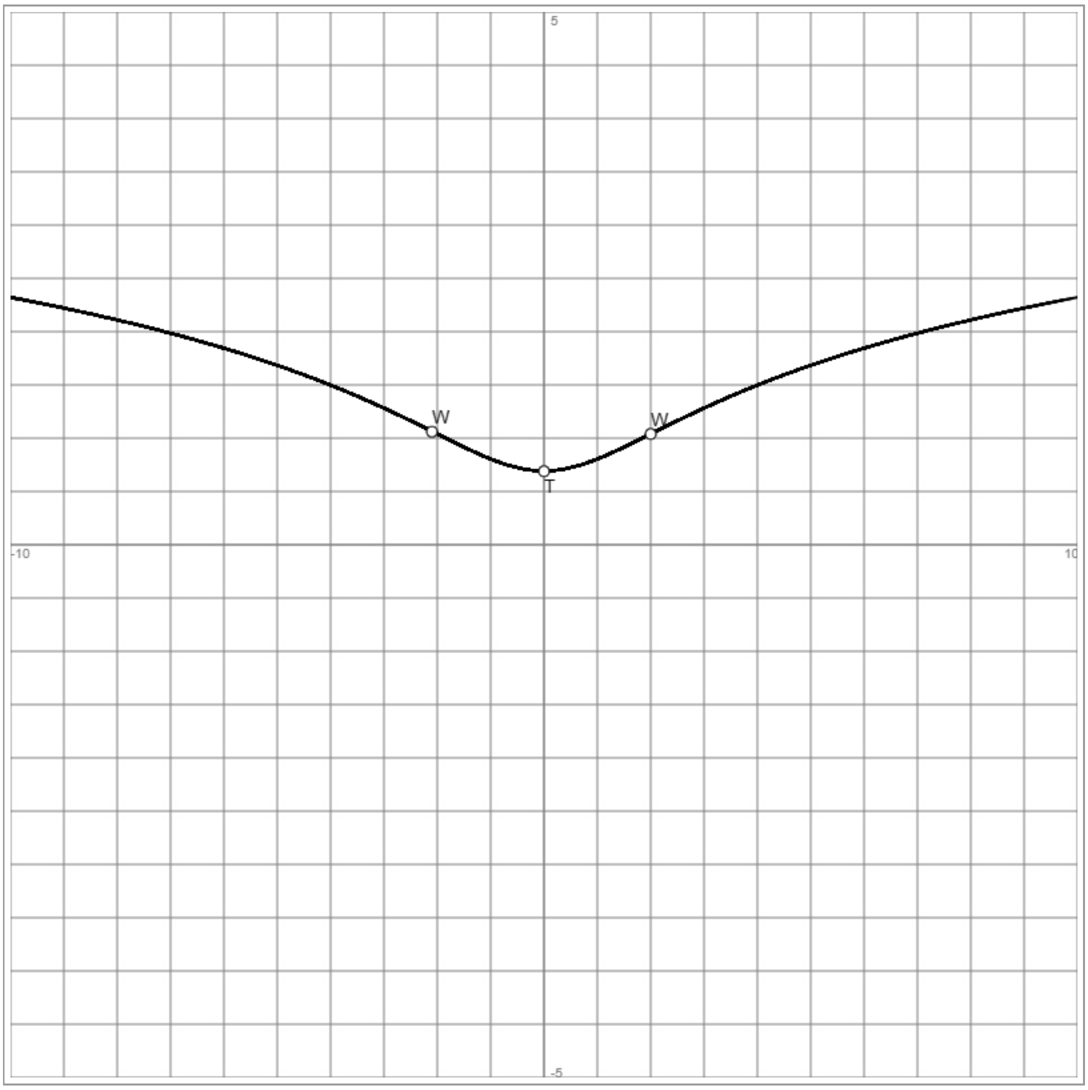
7) Wendepunkte: $f''(x) = \frac{-x^2+4}{(x^2+4)^2}$ = 0 -> $x_{1,2}$ = ±2 mit: f'''(±2) ≠ 0, f(±2) = ln(2√2) -> Wendepunkte W_1(-2|ln(2√2)), W_2(2|ln(2√2)).

III. Es ergibt sich das Aussehen der Funktion gemäß Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-10	2.3222	-0.1	-0.01	
-9.5	2.273	-0.1	-0.01	
-9	2.2213	-0.11	-0.01	
-8.5	2.167	-0.11	-0.01	
-8	2.1098	-0.12	-0.01	
-7.5	2.0493	-0.12	-0.01	
-7	1.9851	-0.13	-0.02	
-6.5	1.917	-0.14	-0.02	
-6	1.8444	-0.15	-0.02	
-5.5	1.7668	-0.16	-0.02	
-5	1.6836	-0.17	-0.02	
-4.5	1.5942	-0.19	-0.03	
-4	1.4979	-0.2	-0.03	
-3.5	1.394	-0.22	-0.03	
-3	1.2825	-0.23	-0.03	
-2.5	1.1636	-0.24	-0.02	
-2.01	1.0422	-0.25	0	Wendepunkt W(-2.01|1.04)
-2	1.0397	-0.25	0	
-1.5	0.9163	-0.24	0.04	
-1	0.8047	-0.2	0.12	
-0.5	0.7235	-0.12	0.21	
0	0.6931	0	0.25	Schnittpunkt S_y(0|0.69) = Tiefpunkt T(0|0.69)
0.5	0.7235	0.12	0.21	
1	0.8047	0.2	0.12	
1.5	0.9163	0.24	0.04	
2	1.0397	0.25	0	Wendepunkt W(2|1.04)

2.5	1.1636	0.24	-0.02	
3	1.2825	0.23	-0.03	
3.5	1.394	0.22	-0.03	
4	1.4979	0.2	-0.03	
4.5	1.5942	0.19	-0.03	
5	1.6836	0.17	-0.02	
5.5	1.7668	0.16	-0.02	
6	1.8444	0.15	-0.02	
6.5	1.917	0.14	-0.02	
7	1.9851	0.13	-0.02	
7.5	2.0493	0.12	-0.01	
8	2.1098	0.12	-0.01	
8.5	2.167	0.11	-0.01	
9	2.2213	0.11	-0.01	
9.5	2.273	0.1	-0.01	
10	2.3222	0.1	-0.01	

Graph: Funktion f(x)



www.michael-buhlmann.de / 01.2023 / Aufgabe 1773