Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Ganz rationale Funktionen

Aufgabe: Beschreibe anhand von Beispielen die Eigenschaften von quadratischen Funktionen (2. Grades) und Polynomen 3. und 4. Grades.

Lösung: I. Eine <u>ganz rationale Funktion (Polynom) n. Grades</u> genügt der Funktionsgleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$

mit höchster Potenz x^n bzw. höchstem, dem Grad der Funktion entsprechendem Exponenten n, $a_n \neq 0$, n als natürliche Zahl oder 0. Für das Folgende ist der Grad n = 2, 3 oder 4, so dass Polynome vom Typ:

$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (quadratische Funktion als Polynom 2. Grades)

$f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + .a_1 x + a_0$ (Polynom 3. Grades)

$f(x) = a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ (Polynom 4. Grades)

vorliegen.

II. Für jede ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ergibt sich hinsichtlich des Verhaltens für betragsmäßig große x, also <u>für x->-∞ bzw. x->+∞</u>:

a>0	n ungerade	n gerade
x->-∞:	f(x) -> -∞	f(x) -> ∞
x->∞:	f(x) -> ∞	f(x) -> ∞

a<0	n ungerade	n gerade
x->-∞:	f(x) -> ∞	f(x) -> -∞
x->∞:	f(x) -> -∞	f(x) -> -∞

III. Die <u>Nullstellen</u> einer ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ergeben sich als Lösungen der Gleichung:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

mit maximal n Nullstellen der Funktion. Ist n ungerade, so besitzt die Funktion f(x) mindestens eine Nullstelle. Ist n gerade, so kann es auch keine Nullstellen geben. Die Nullstellen können auch in Vielfachheiten auftreten (einfache, doppelte, dreifache Nullstellen, …).

IV. Hinsichtlich der <u>Hoch- und Tiefpunkte</u> einer ganz rationalen Funktion f(x) n. Grades gelten die Regeln der Differentialrechnung mit maximal n-1 Extrempunkten (oder Sattelpunkten) der Funktion. Ist n gerade, so gibt es mindestens einen Hoch- oder Tiefpunkt der Funktion f(x) ist; ist n ungerade, so kann es auch keine Hoch- und Tiefpunkte geben, und es kann niemals eine ungerade Anzahl von Extrempunkten geben. Mit den Hoch- und Tiefpunkt ist eine Änderung des Monotonieverhaltens (steigende, fallende Monotonie) der Funktion verbunden.

V. Hinsichtlich der <u>Wendepunkte</u> einer ganz rationalen Funktion f(x) n. Grades gelten die Regeln der Differentialrechnung mit maximal n-2 Wendepunkte der Funktion. Ist n ungerade, so besitzt die Funktion f(x) mindestens einen Wendepunkt; ist n gerade, so kann es auch keine Wendepunkte geben, und es kann niemals eine ungerade Anzahl von Wendepunkten geben.

VI. Eine ganz rationale Funktion f(x) n. Grades ist für ungerades n <u>punktsymmetrisch zum Ursprung des Koordinatensystems</u> (<u>ungerade</u>), wenn alle im Funktionsterm auftretenden Potenzen ungerade sind, wenn also f(-x) = -f(x) gilt. Eine ganz rationale Funktion f(x) n. Grades ist für gerades n <u>achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems</u> (<u>gerade</u>), wenn alle im Funktionsterm auftretenden Potenzen gerade sind, wenn also f(-x) = f(x) gilt. Entsprechend gilt: Jede ganz rationale Funktion n. Grades $f(x) = ax^n + …$ hat für gerades $n \geq 2$ einen Hoch- oder Tiefpunkt auf der y-Achse, wenn sie achsensymmetrisch zur y-Achse des Koordinatensystems ist.

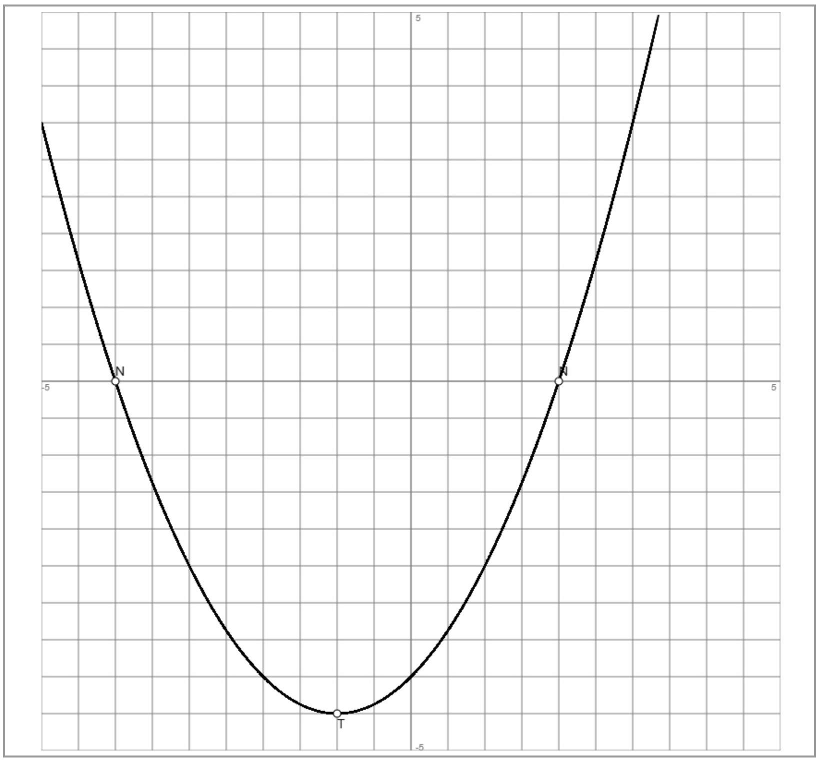
VII. Wir betrachten quadratische Funktionen oder Parabeln: $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$. Sie zeichnen sich durch einen Scheitelpunkt als Hoch- oder Tiefpunkt aus, sind bei: x->±∞: f(x) -> -∞ oder: x->±∞: f(x) -> +∞ nach unten bzw. nach oben geöffnet und besitzen keine, eine oder zwei Nullstellen. Beispielhaft führen wir auf:

a) Quadratisches Polynom, Parabel: $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-4$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	3.5	-4	1	
-4.5	1.625	-3.5	1	
-4	0	-3	1	Nullstelle N(-4|0)
-3.5	-1.375	-2.5	1	
-3	-2.5	-2	1	
-2.5	-3.375	-1.5	1	
-2	-4	-1	1	
-1.5	-4.375	-0.5	1	
-1	-4.5	0	1	Tiefpunkt T(-1|-4.5)
-0.5	-4.375	0.5	1	
0	-4	1	1	Schnittpunkt S_y(0|-4)
0.5	-3.375	1.5	1	
1	-2.5	2	1	
1.5	-1.375	2.5	1	
2	0	3	1	Nullstelle N(2|0)
2.5	1.625	3.5	1	
3	3.5	4	1	
3.5	5.625	4.5	1	
4	8	5	1	
4.5	10.625	5.5	1	
5	13.5	6	1	

Graph:



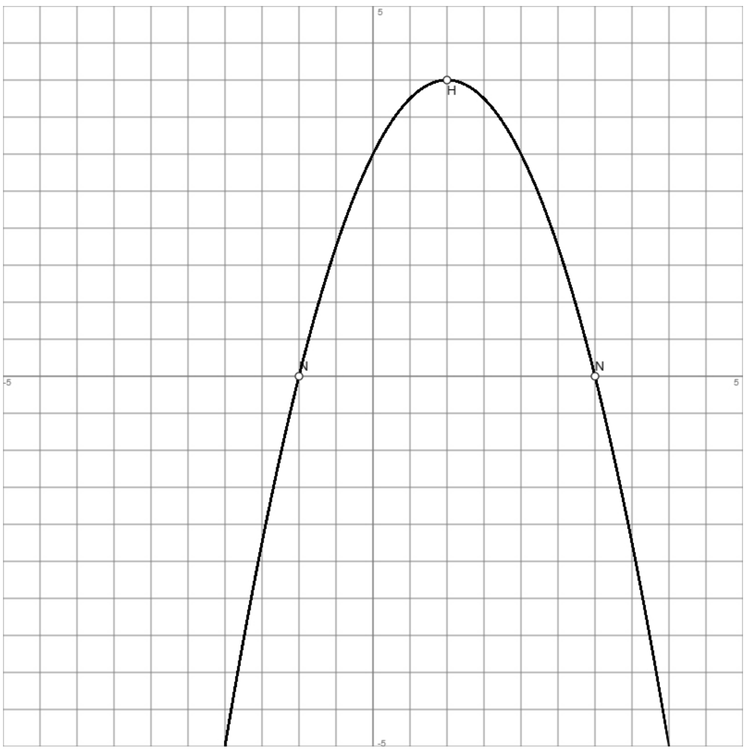
x->-∞: f(x) -> +∞; x->+∞: f(x) -> +∞
Achsensymmetrie zur Geraden x = -1 (Tiefpunkt T(-1|-4.5))

b) Quadratisches Polynom, Parabel: $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	-32	12	-2	
-4.5	-26.25	11	-2	
-4	-21	10	-2	
-3.5	-16.25	9	-2	
-3	-12	8	-2	
-2.5	-8.25	7	-2	
-2	-5	6	-2	
-1.5	-2.25	5	-2	
-1	0	4	-2	Nullstelle N(-1|0)
-0.5	1.75	3	-2	
0	3	2	-2	Schnittpunkt S_y(0|3)
0.5	3.75	1	-2	
1	4	0	-2	Hochpunkt H(1|4)
1.5	3.75	-1	-2	
2	3	-2	-2	
2.5	1.75	-3	-2	
3	0	-4	-2	Nullstelle N(3|0)
3.5	-2.25	-5	-2	
4	-5	-6	-2	
4.5	-8.25	-7	-2	
5	-12	-8	-2	

Graph:



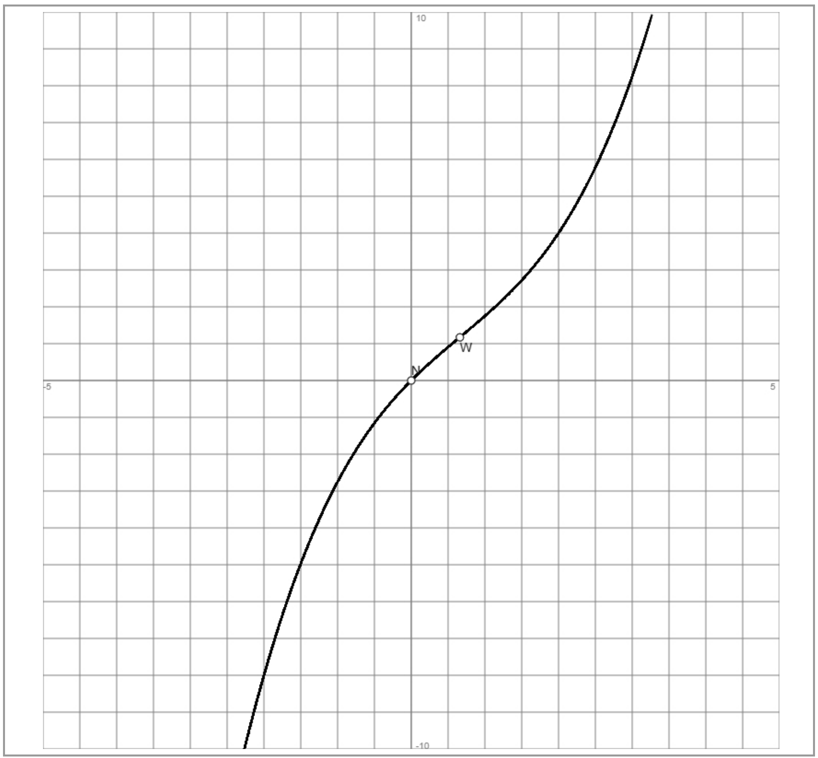
x->-∞: f(x) -> -∞; x->+∞: f(x) -> -∞
Achsensymmetrie zur Geraden x = 1 (Hochpunkt H(1|4))

VIII. Wir betrachten Polynomfunktionen 3. Grades: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + .a_1x + a_0$. Sie zeichnen sich durch einen Wendepunkt, meist durch je einen Hoch- und Tiefpunkt aus und besitzen mindestens eine Nullstelle auch auf Grund ihres Verhaltens für betragsmäßig große x: x->±∞: f(x) -> -∞ bzw. f(x) -> +∞ oder: x->±∞: f(x) -> +∞ bzw. f(x) -> -∞. Beispielhaft führen wir auf:

a) Polynomfunktion 3. Grades: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-53.75	25.75	-8.5	
-4.5	-41.9062	21.69	-7.75	
-4	-32	18	-7	
-3.5	-23.8437	14.69	-6.25	
-3	-17.25	11.75	-5.5	
-2.5	-12.0312	9.19	-4.75	
-2	-8	7	-4	
-1.5	-4.9687	5.19	-3.25	
-1	-2.75	3.75	-2.5	
-0.5	-1.1562	2.69	-1.75	
0	0	2	-1	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	0.9063	1.69	-0.25	
0.66	1.1741	1.67	-0.01	Wendepunkt W(0.66|1.17)
1	1.75	1.75	0.5	
1.5	2.7188	2.19	1.25	
2	4	3	2	
2.5	5.7813	4.19	2.75	
3	8.25	5.75	3.5	
3.5	11.5938	7.69	4.25	
4	16	10	5	
4.5	21.6563	12.69	5.75	

Graph:



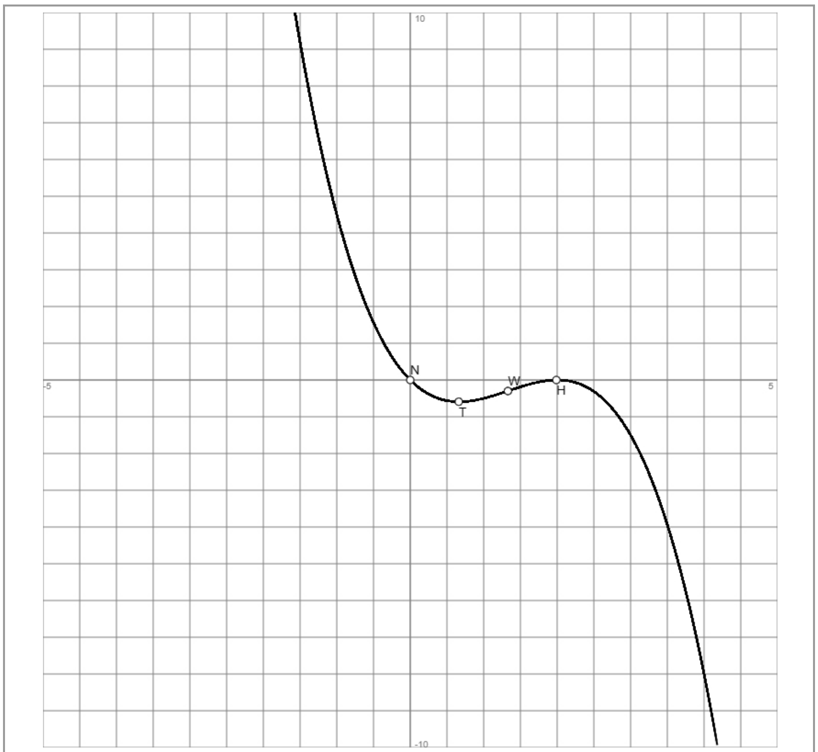
x->-∞: f(x) -> -∞; x->+∞: f(x) -> +∞

b) Ganz rationale Funktion 3. Grades (in Linearfaktorzerlegung): $f(x) = -\frac{1}{2}x(x-2)^2$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	72	-42	16	
-3.5	52.9375	-34.38	14.5	
-3	37.5	-27.5	13	
-2.5	25.3125	-21.38	11.5	
-2	16	-16	10	
-1.5	9.1875	-11.38	8.5	
-1	4.5	-7.5	7	
-0.5	1.5625	-4.38	5.5	
0	0	-2	4	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0)
0.5	-0.5625	-0.38	2.5	
0.66	-0.5925	-0.01	2.02	Tiefpunkt T(0.66|-0.59)
1	-0.5	0.5	1	
1.33	-0.2985	0.67	0.01	Wendepunkt W(1.33|-0.3)
1.5	-0.1875	0.62	-0.5	
2	0	0	-2	Hochpunkt H(2|0)
2.5	-0.3125	-1.38	-3.5	
3	-1.5	-3.5	-5	
3.5	-3.9375	-6.38	-6.5	
4	-8	-10	-8	

Graph:



x->-∞: f(x) -> +∞; x->+∞: f(x) -> -∞

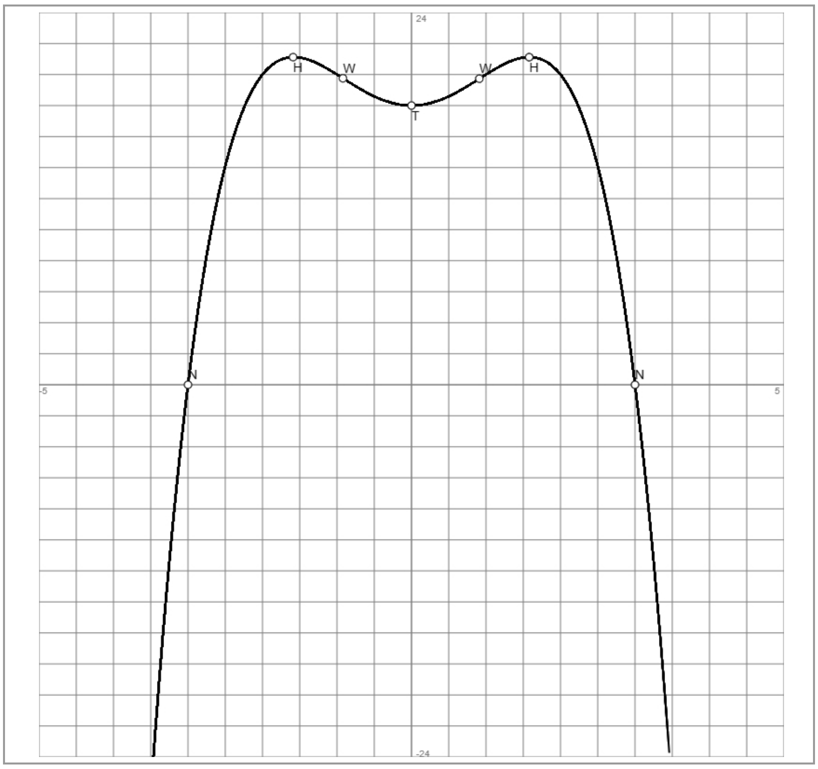
IX. Wir betrachten <u>Polynomfunktionen 4. Grades</u>: $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Sie zeichnen sich durch mindestens einen Hoch- oder Tiefpunkt aus und durch ihr Verhalten für betragsmäßig große x: x->±∞: f(x) -> +∞ oder: x->±∞: f(x) -> -∞. Beispielhaft führen wir auf:

a) Polynomfunktion 4. Grades: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + 18$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:

x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	-70	108	-91	
-3.5	-26.4062	68.25	-68.5	
-3	0	39	-49	Nullstelle N(-3|0)
-2.5	14.0938	18.75	-32.5	
-2	20	6	-19	
-1.59	21.1246	0.09	-10.17	Hochpunkt H(-1.59|21.12)
-1.5	21.0938	-0.75	-8.5	
-1	20	-3	-1	
-0.92	19.7578	-3.04	-0.08	Wendepunkt W(-0.92|19.76)
-0.5	18.5938	-2.25	3.5	
0	18	0	5	Schnittpunkt S_y(0|18) = Tiefpunkt T(0|18)
0.5	18.5938	2.25	3.5	
0.91	19.7274	3.04	0.03	Wendepunkt W(0.91|19.73)
1	20	3	-1	
1.5	21.0938	0.75	-8.5	
1.58	21.125	0.01	-9.98	Hochpunkt H(1.58|21.12)
2	20	-6	-19	
2.5	14.0938	-18.75	-32.5	
3	0	-39	-49	Nullstelle N(3|0)
3.5	-26.4062	-68.25	-68.5	
4	-70	-108	-91	

Graph:

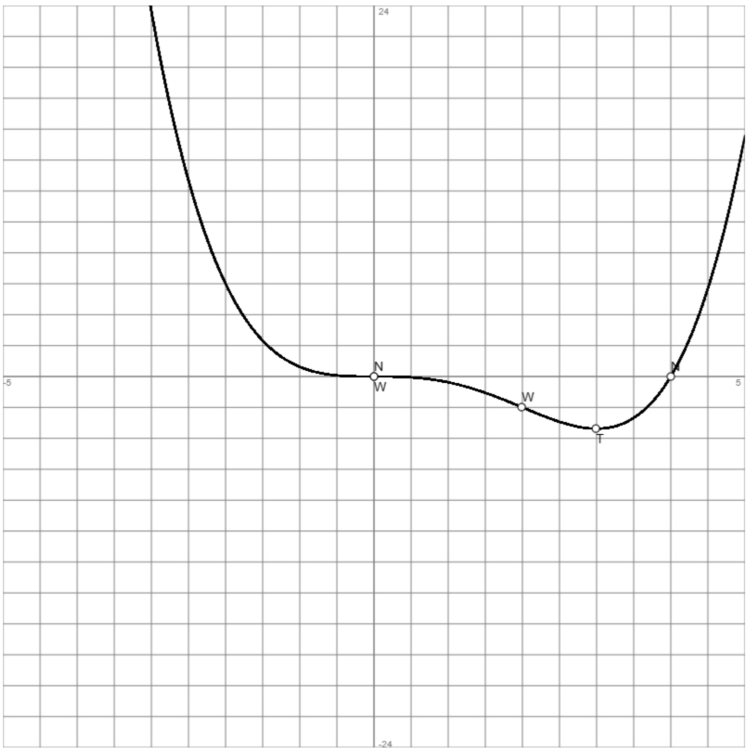


x->-∞: f(x) -> -∞; x->+∞: f(x) -> -∞
Achsensymmetrie zur y-Achse (nur gerade Exponenten im Funktionsterm)

b) Ganz rationale Funktion 4. Grades (in Linearfaktorzerlegung): $f(x) = \frac{1}{8}x^3(x-4)$ mit Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-4	64	-56	36	
-3.5	40.1953	-39.81	28.88	
-3	23.625	-27	22.5	
-2.5	12.6953	-17.19	16.88	
-2	6	-10	12	
-1.5	2.3203	-5.06	7.88	
-1	0.625	-2	4.5	
-0.5	0.0703	-0.44	1.88	
0	0	0	0	Nullstelle N(0|0) = Schnittpunkt S_y(0|0) = Wendepunkt W(0|0) = Sattelpunkt W(0|0)
0.5	-0.0547	-0.31	-1.12	
1	-0.375	-1	-1.5	
1.5	-1.0547	-1.69	-1.12	
2	-2	-2	0	Wendepunkt W(2|-2)
2.5	-2.9297	-1.56	1.88	
3	-3.375	0	4.5	Tiefpunkt T(3|-3.38)
3.5	-2.6797	3.06	7.88	
4	0	8	12	Nullstelle N(4|0)
4.5	5.6953	15.19	16.88	
5	15.625	25	22.5	

Graph:



x->-∞: f(x) -> +∞; x->+∞: f(x) -> +∞