

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln(\sin(x) + 1)$. Untersuche den Funktionsverlauf u.a. in Bezug auf Definitionsbereich, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion $f(x)$ die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit Funktionsterm $y = f(x)$, D_f als maximale Definitionsmenge (als $\mathbf{R}$ [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nenner-nullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung $f(x) = 0$ lösen): $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow N(x_1 0), N(x_2 0), \dots$
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$; ...
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow P_1(x_1 f(x_1)), P_2(x_2 f(x_2)), \dots$
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$; ...
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge $D_f \rightarrow$ Randstellen der Definitionsmenge $D_f \Rightarrow$ Definitionslücken $x_1, x_2, x_3 \dots$ b) $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow -\infty$ oder: $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_1$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow +\infty$ oder: $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x_2$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x \rightarrow x_3: f(x) \rightarrow r \Rightarrow x_3$ (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$); ... – Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$)
Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach IV.]; bei Wendepunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0) < 0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$); ... – Krümmungsintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:

- Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ (gerade)
- Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade)
- Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
- Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
- Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
- Es gilt für die Ableitungen einer Funktion $f(x)$: $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw.; $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.
- Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$):

- $f(x)$ als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n > 0$	n ungerade	n gerade	$a_n < 0$	n ungerade	n gerade
$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

- $f(x)$ als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

- $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow 0 = y$ ($n < m$)
- $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow a/b = y$ ($n = m$; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
- $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ($n > m$)

mit y als waagerechter Asymptote.

- $f(x)$ mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

- $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow -\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow d = y$ ($b > 0$); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow d = y$ ($b < 0$), $\rightarrow \pm\infty$ ($b > 0$)
- $x \rightarrow -\infty$: $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow 0 = y$ ($b > 0$); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow 0 = y$ ($b < 0$), $\rightarrow \pm\infty$ ($b > 0$)

mit y als waagerechter Asymptote.

- $f(x)$ mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil:

- $x > 0$: $\ln(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$: $\ln(x) \rightarrow +\infty$

mit $x = 0$ als Polstellen/senkrechte Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Definitionsbereich: Wegen $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ gilt: $y = \sin(x) + 1 \geq 0$, so dass bei $y = 0$ der Term $\ln(y) = \ln(0)$ nicht definiert ist. Es gilt dabei:

$$y = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin(x) = -1 \Leftrightarrow x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Die Funktion $f(x) = \ln(\sin(x) + 1)$ ist an den Stellen $x = (4k + 3)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht definiert; als Definitionsbereich ergibt sich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{(4k + 3)\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Die Funktion verfügt als Logarithmus wegen des nichtnegativen Arguments $y = \sin(x) + 1$ über Polstellen/senkrechte Asymptoten mit:

$$x \rightarrow (4k + 3)\frac{\pi}{2} : f(x) \rightarrow -\infty, k \in \mathbb{Z}.$$

III. Nullstellen: Für die Bestimmung der Nullstellen gilt u.a. durch Exponieren:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(\sin(x) + 1) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + 1 = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z},$$

so dass die Nullstellen die Funktionspunkte $N_k(k\pi \mid 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sind.

IV. Ableitungen: Die ersten zwei Ableitungen zu $f(x) = \ln(\sin(x) + 1)$ – nur sie benötigen wir hier – ergeben sich aus der Anwendung von Ketten- und Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{\sin(x)+1} \cdot \cos(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1}$$

$$f''(x) = \frac{-\sin(x) \cdot (\sin(x)+1) - \cos(x) \cdot \cos(x)}{(\sin(x)+1)^2} = \frac{-\sin^2(x) - \sin(x) - \cos^2(x)}{(\sin(x)+1)^2} = \frac{-\sin(x)-1}{(\sin(x)+1)^2} =$$

$$-\frac{\sin(x)+1}{(\sin(x)+1)^2} = -\frac{1}{\sin(x)+1} \quad (\text{u.a. auf Grund der trigonometrischen Beziehung: } \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1).$$

V. Extrempunkte: Wir setzen die 1. Ableitung gleich Null und erhalten:

$$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1} = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2}, k_1 \in \mathbb{Z};$$

allerdings liegen die Stellen $x = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2} = (2(2k + 1) + 1) \frac{\pi}{2} = (4k + 3) \frac{\pi}{2}$ für ungerade $k_1 = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}$, nicht im Definitionsbereich der Funktion. Für gerade $k_1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$, ergeben die Stellen $x = (2k_1 + 1) \frac{\pi}{2} = (2 \cdot 2k + 1) \frac{\pi}{2} = (4k + 1) \frac{\pi}{2}$ beim Einsetzen in die 2. Ableitung:

$$f''\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)+1} = -\frac{1}{1+1} = -\frac{1}{2} < 0,$$

so dass Hochpunkte vorliegen. Mit $f\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\sin\left((4k+1)\frac{\pi}{2}\right)+1\right) = \ln(1+1) = \ln(2)$ besitzt die Funktion die Hochpunkte $H_k\left((4k+1)\frac{\pi}{2} | \ln(2)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

VI. Wendepunkte: Mit dem Nullsetzen der 2. Ableitung folgen:

$$f''(x) = -\frac{1}{\sin(x)+1} = 0 \Leftrightarrow -1 = 0$$

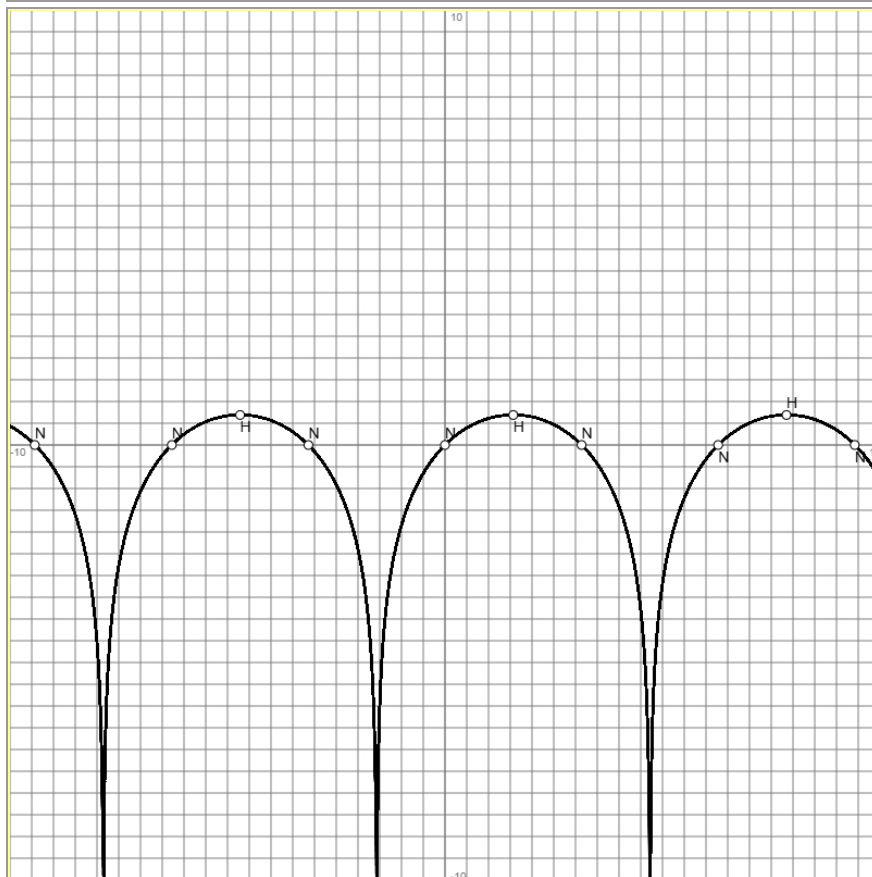
und damit ein Widerspruch. Wendepunkte gibt es demnach keine.

VII. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-10	0.4344	-0.54	-0.65	
-9.5	0.0725	-0.93	-0.93	
-9.425	0	-1	-1	Nullstelle N(-9.43 0)
-9	-0.5312	-1.55	-1.7	
-8.5	-1.6019	-2.99	-4.96	
-8	-4.543	-13.67	-93.97	
-7.855	-Infinity	-	-	Polstelle x = -7.855
-7.5	-2.7806	5.59	-16.13	
-7	-1.07	2.2	-2.92	
-6.5	-0.2422	1.24	-1.27	
-6.284	0	1	-1	Nullstelle N(-6.28 0)
-6	0.2464	0.75	-0.78	
-5.5	0.5339	0.42	-0.59	
-5	0.6724	0.14	-0.51	
-4.713	0.6931	0	-0.5	Hochpunkt H(-4.71 0.69)
-4.5	0.6818	-0.11	-0.51	
-4	0.5635	-0.37	-0.57	
-3.5	0.3007	-0.69	-0.74	
-3.142	0.0004	-1	-1	Nullstelle N(-3.14 0)
-3	-0.1521	-1.15	-1.16	
-2.5	-0.9125	-2	-2.49	
-2	-2.4002	-4.59	-11.03	

-1.572	- Infinity	-	-	Polstelle $x = -1.573$
-1.5	-5.9895	28.24	-399.24	
-1	-1.8418	3.41	-6.31	
-0.5	-0.6528	1.69	-1.92	
0	0	1	-1	Nullstelle $N(0 0) = \text{Schnittpunkt } S_y(0 0)$
0.5	0.3917	0.59	-0.68	
1	0.6106	0.29	-0.54	
1.5	0.6919	0.04	-0.5	
1.57	0.6931	0	-0.5	Hochpunkt $H(1.57 0.69)$
2	0.6467	-0.22	-0.52	
2.5	0.469	-0.5	-0.63	
3	0.132	-0.87	-0.88	
3.141	0	-1	-1	Nullstelle $N(3.14 0)$
3.5	-0.432	-1.44	-1.54	
4	-1.4139	-2.69	-4.11	
4.5	-3.7956	-9.38	-44.5	
4.712	- Infinity	-	-	Polstelle $x = 4.712$
5	-3.1923	6.91	-24.35	
5.5	-1.2226	2.41	-3.4	
6	-0.3277	1.33	-1.39	
6.283	0	1	-1	Nullstelle $N(6.28 0)$
6.5	0.1948	0.8	-0.82	
7	0.505	0.45	-0.6	
7.5	0.6617	0.18	-0.52	
7.853	0.6931	0	-0.5	Hochpunkt $H(7.85 0.69)$
8	0.6878	-0.07	-0.5	
8.5	0.5869	-0.33	-0.56	
9	0.3451	-0.65	-0.71	
9.424	0	-1	-1	Nullstelle $N(9.42 0)$
9.5	-0.0781	-1.08	-1.08	
10	-0.7853	-1.84	-2.19	

Graph:



($\mathbf{R}$ = Menge der reellen Zahlen, $\mathbf{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen) www.michael-buhlmann.de / 12.2025 / Aufgabe 2566