

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung

Aufgabe: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(\ln(x^2))$, $x \neq 0$. Untersuche den Funktionsverlauf u.a. in Bezug auf Definitionsbereich, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte.

Lösung: I. Allgemein gilt für die Kurvendiskussion/Funktionsuntersuchung einer reellwertigen Funktion $f(x)$ die folgende Vorgehensweise:

Kurvendiskussion
Differenzierbare Funktion: $f: D_f \rightarrow \mathbf{R}$ mit Funktionsterm $y = f(x)$, D_f als maximale Definitionsmenge (als $\mathbf{R}$ [bei ganz rationalen Funktionen, trigonometrischen Funktionen, Exponentialfunktionen] bzw. ohne Nenner-nullstellen bei Bruchtermen [von gebrochen rationalen Funktionen] bzw. ohne Stellen mit negativen Radikanden [bei Quadratwurzeln] usw.)
I. Ableitungen: $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$
II. Nullstellen (Gleichung $f(x) = 0$ lösen): $f(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow N(x_1 0), N(x_2 0), \dots$
III. Hochpunkte, Tiefpunkte (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f''(x)$ einsetzen): a) $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f''(x_1) < 0 \rightarrow H(x_1 f(x_1))$ oder $f''(x_1) > 0 \rightarrow T(x_1 f(x_1))$; $f''(x_2) < 0 \rightarrow H(x_2 f(x_2))$ oder $f''(x_2) > 0 \rightarrow T(x_2 f(x_2))$; ...
IIIa. Punkte mit waagerechter Tangente (Gleichung $f'(x) = 0$ lösen): $f'(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots \rightarrow P_1(x_1 f(x_1)), P_2(x_2 f(x_2)), \dots$
IV. Wendepunkte (Gleichung $f''(x) = 0$ lösen, Lösungen in $f'''(x)$ einsetzen): a) $f''(x) = 0 \rightarrow x_1, x_2, \dots$ b) $f'''(x_1) \neq 0 \rightarrow W(x_1 f(x_1))$; $f'''(x_2) \neq 0 \rightarrow W(x_2 f(x_2))$; ...
IVa. Sattelpunkte x_0 liegen vor, wenn (nach III. und IV.) gilt: $f'(x_0) = 0, f''(x_0) = 0, f'''(x_0) \neq 0 \rightarrow S(x_0 f(x_0))$
V. Polstellen/senkrechte Asymptoten, Lücken: a) Definitionsmenge $D_f \rightarrow$ Randstellen der Definitionsmenge $D_f \Rightarrow$ Definitionslücken $x_1, x_2, x_3 \dots$ b) $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow -\infty$ oder: $x \rightarrow x_1, x > x_1: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_1, x < x_1: f(x) \rightarrow +\infty \Rightarrow x_1$ Polstelle mit Vorzeichenwechsel c) $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow +\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow +\infty$ oder: $x \rightarrow x_2, x > x_2: f(x) \rightarrow -\infty, x \rightarrow x_2, x < x_2: f(x) \rightarrow -\infty \Rightarrow x_2$ Polstelle ohne Vorzeichenwechsel d) $x \rightarrow x_3: f(x) \rightarrow r \Rightarrow x_3$ (stetig fortsetzbare, hebbare) (Definitions-) Lücke mit Lückenwert r
VI. Monotonie (steigende [wachsende], fallende Monotonie [nach III.]; bei abwechselnden Hoch- und Tiefpunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Monotonieintervall): – Monotonieintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ monoton steigend (x_1 als Hochpunkt, $f'(x_0) > 0$) oder monoton fallend (x_1 als Tiefpunkt, $f'(x_0) < 0$); – Monotonieintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ monoton fallend (x_1 als Hochpunkt, x_2 als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie, $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_1 als Tiefpunkt, x_2 als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie $f'(x_0) > 0$); ... – Monotonieintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ monoton fallend (x_n als Hochpunkt, vorheriges Intervall mit steigender Monotonie $f'(x_0) < 0$) oder monoton steigend (x_n als Tiefpunkt, vorheriges Intervall mit fallender Monotonie, $f'(x_0) > 0$)
Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Monotonieintervalle mit einzubeziehen.
VII. Krümmung (Links-, Rechtskrümmung, Konvexität, Konkavität [nach IV.]; bei Wendepunkten $x_1, x_2, \dots, x_n$ mit $x_1 < x_2 < \dots < x_n, x_0$ als Stelle im jeweiligen Krümmungsintervall): – Krümmungsintervall $(-\infty, x_1)$: $f(x)$ links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, $f''(x_0) > 0$) oder rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, $f''(x_0) < 0$); – Krümmungsintervall (x_1, x_2) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$); ... – Krümmungsintervall (x_n, ∞) : $f(x)$ rechts gekrümmt (bei Hochpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Linkskrümmung, $f''(x_0) < 0$) oder links gekrümmt (bei Tiefpunkt im Intervall, vorheriges Intervall mit Rechtskrümmung, $f''(x_0) > 0$)

Im Fall der Existenz von Polstellen sind diese als Grenzen der Krümmungsintervalle mit einzubeziehen.

VIII. Symmetrie:

- Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$ (gerade)
- Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$ (ungerade)
- Vielfache und Summe von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch bzw. zum Ursprung punktsymmetrisch.
- Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit geraden Exponenten enthalten, sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ganz rationale Funktionen, die nur Potenzen mit ungeraden Exponenten enthalten, sind zum Ursprung punktsymmetrisch.
- Produkte und Quotienten von zur y-Achse achsensymmetrischen Funktionen bzw. von zum Ursprung punktsymmetrischen Funktionen sind zur y-Achse achsensymmetrisch. Ist in einem Produkt der eine Faktor zur y-Achse achsensymmetrisch, der andere zum Ursprung punktsymmetrisch, dann ist das Produkt zum Ursprung punktsymmetrisch; Entsprechendes ergibt sich für einen Quotienten aus einer Zähler- und Nennerfunktion.
- Es gilt für die Ableitungen einer Funktion $f(x)$: $f(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ achsensymmetrisch usw.; $f(x)$ punktsymmetrisch $\rightarrow f'(x)$ achsensymmetrisch $\rightarrow f''(x)$ punktsymmetrisch usw.
- Nicht konstante Funktionen, die zur y-Achse achsensymmetrisch sind, besitzen auf der y-Achse einen Extrempunkt, falls dort definiert.

IX. Verhalten für betragsmäßig große x ($x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -\infty$):

- $f(x)$ als ganz rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion):

$a_n > 0$	n ungerade	n gerade	$a_n < 0$	n ungerade	n gerade
$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$
$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$x \rightarrow -\infty$	$f(x) \rightarrow \infty$	$f(x) \rightarrow -\infty$

- $f(x)$ als gebrochen rationale Funktion (n als Grad der ganz rationalen Funktion im Zähler, m als Grad der ganz rationalen Funktion im Nenner):

- $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow 0 = y$ ($n < m$)
- $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow a/b = y$ ($n = m$; a, b Koeffizienten der höchsten Potenz im Zähler bzw. Nenner)
- $x \rightarrow \pm\infty$: $f(x) \rightarrow \pm\infty$ ($n > m$)

mit y als waagerechter Asymptote.

- $f(x)$ mit natürlicher Exponentialfunktion als Anteil:

- $x \rightarrow -\infty$: $e^x \rightarrow 0$, $x \rightarrow +\infty$: $e^x \rightarrow +\infty$
- $x \rightarrow -\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow d = y$ ($b > 0$); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = ae^{bx+c} + d \rightarrow d = y$ ($b < 0$), $\rightarrow \pm\infty$ ($b > 0$)
- $x \rightarrow -\infty$: $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow 0 = y$ ($b > 0$); $x \rightarrow +\infty$: $f(x) = (a_n x^n + \dots)e^{bx} \rightarrow \pm\infty$ ($b < 0$), $\rightarrow \pm\infty$ ($b > 0$)

mit y als waagerechter Asymptote.

- $f(x)$ mit natürlicher Logarithmusfunktion als Anteil:

- $x > 0$: $\ln(x) \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$: $\ln(x) \rightarrow +\infty$

mit $x = 0$ als Polstellen/senkrechte Asymptote.

Funktionsuntersuchung von Funktionen (allgemein)

II. Definitionsbereich: Der Term $\ln(y)$ ist für $y = 0$ nicht definiert. Mit $y = x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ist damit der Definitionsbereich: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. An der Stelle $x = 0$ verfügt die Funktion $f(x) = \sin(\ln(x^2))$ über eine sog. Unstetigkeitsstelle, d.h. die Funktion durchläuft bei Annäherung $x \rightarrow 0$ abzählbar unendlich oft alle reelle Zahlen aus dem Intervall $[-1; 1]$.

III. Nullstellen: Für die Bestimmung der Nullstellen gilt u.a. durch Exponieren:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(\ln(x^2)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = k\pi \Leftrightarrow x^2 = e^{k\pi} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{e^{k\pi}} = \pm e^{0,5k\pi}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

so dass die Nullstellen die Funktionspunkte $N(\pm e^{0,5k\pi} | 0)$, $k \in \mathbb{Z}$, sind.

IV. Ableitungen: Die ersten drei Ableitungen zu $f(x) = \sin(\ln(x^2))$ ergeben sich aus der Anwendung von Ketten- und Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(\ln(x^2)) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \cdot \cos(\ln(x^2)) \\ f''(x) &= -\frac{2}{x^2} \cdot \cos(\ln(x^2)) + \frac{2}{x} \cdot \left(-\sin(\ln(x^2)) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x \right) = -\frac{2}{x^2} \cdot \cos(\ln(x^2)) - \frac{4}{x^2} \sin(\ln(x^2)) = \\ &= -\frac{2}{x^2} \cdot [\cos(\ln(x^2)) + 2\sin(\ln(x^2))] \end{aligned}$$

$$f'''(x) = \frac{4}{x^3} \cdot [\cos(\ln(x^2)) + 2 \sin(\ln(x^2))] - \frac{2}{x^2} \cdot \left[-\frac{2}{x} \cdot \sin(\ln(x^2)) + \frac{4}{x} \cdot \cos(\ln(x^2)) \right] =$$

$$\frac{4}{x^3} \cdot [\cos(\ln(x^2)) + 2 \sin(\ln(x^2))] + \frac{4}{x^3} \cdot [\sin(\ln(x^2)) - 2 \cos(\ln(x^2))]$$

V. Extrempunkte: Wir setzen die 1. Ableitung gleich Null und erhalten:

$$f'(x) = \frac{2}{x} \cdot \cos(\ln(x^2)) = 0 \Leftrightarrow \cos(\ln(x^2)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x^2) = (2k+1) \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x^2 = e^{(2k+1) \frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow$$

$$x = \pm \sqrt{e^{(2k+1) \frac{\pi}{2}}} = \pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}, k \in \mathbb{Z}.$$

Die Stellen $x = \pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}$ ergeben beim Einsetzen in die 2. Ableitung:

$$f''\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right) = -\frac{2}{\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right)^2} \cdot \left[\cos\left(\ln\left(\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right)^2\right)\right) + 2 \sin\left(\ln\left(\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right)^2\right)\right) \right] =$$

$$-2e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} \cdot \left[\cos\left(\ln\left(e^{(2k+1) \frac{\pi}{2}}\right)\right) + 2 \sin\left(\ln\left(e^{(2k+1) \frac{\pi}{2}}\right)\right) \right] =$$

$$-2e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} \cdot \left[\cos\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) + 2 \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) \right] = -2e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} \cdot \left[0 + 2 \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) \right] =$$

$$-4e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} \cdot \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} -4e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} \cdot 1 = -4e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} < 0 \\ -4e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} \cdot (-1) = 4e^{-(2k+1) \frac{\pi}{2}} > 0 \end{cases}$$

für gerade bzw. ungerade k , so dass bei geraden k Hochpunkte vorliegen mit Funktionswert

$$f\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right) = \sin\left(\ln\left(\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right)^2\right)\right) = \sin\left(\ln\left(e^{(2k+1) \frac{\pi}{2}}\right)\right) = \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) = 1, \text{ also die Hoch-}$$

punkte $H(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}} | 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, gerade, bei ungeraden k die Funktion Tiefpunkte besitzt mit Funktionswert:

$$f\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right) = \sin\left(\ln\left(\left(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}}\right)^2\right)\right) = \sin\left(\ln\left(e^{(2k+1) \frac{\pi}{2}}\right)\right) = \sin\left((2k+1) \frac{\pi}{2}\right) = -1, \text{ also die}$$

Tiefpunkte $T(\pm e^{(2k+1) \frac{\pi}{4}} | -1)$, $k \in \mathbb{Z}$, ungerade.

VI. Wendepunkte: Mit dem Nullsetzen der 2. Ableitung folgt:

$$f''(x) = -\frac{2}{x^2} \cdot [\cos(\ln(x^2)) + 2 \sin(\ln(x^2))] = 0 \Leftrightarrow \cos(\ln(x^2)) + 2 \sin(\ln(x^2)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$1 + 2 \tan(\ln(x^2)) = 0 \Leftrightarrow 2 \tan(\ln(x^2)) = -1 \Leftrightarrow \tan(\ln(x^2)) = -0,5 \Leftrightarrow \ln(x^2) = -0,4636 + k\pi \Leftrightarrow$$

$$x^2 = e^{-0,4636 + k\pi} = 0,629e^{k\pi} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{0,629e^{k\pi}} = \pm 0,7931e^{k \frac{\pi}{2}}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ohne ausführliche Rechnung ist dann: $f'''\left(\pm 0,7931e^{k \frac{\pi}{2}}\right) \neq 0$, so dass die Funktion bei geradem k

mit Funktionswert: $f\left(\pm 0,7931e^{k \frac{\pi}{2}}\right) = -0,45$ die Wendepunkte $W(\pm 0,7931e^{k \frac{\pi}{2}} | -0,45)$, $k \in \mathbb{Z}$, gerade,

besitzt, bei ungeradem k mit Funktionswert: $f\left(\pm 0,7931e^{k\frac{\pi}{2}}\right) = 0,45$ hingegen die Wendepunkte

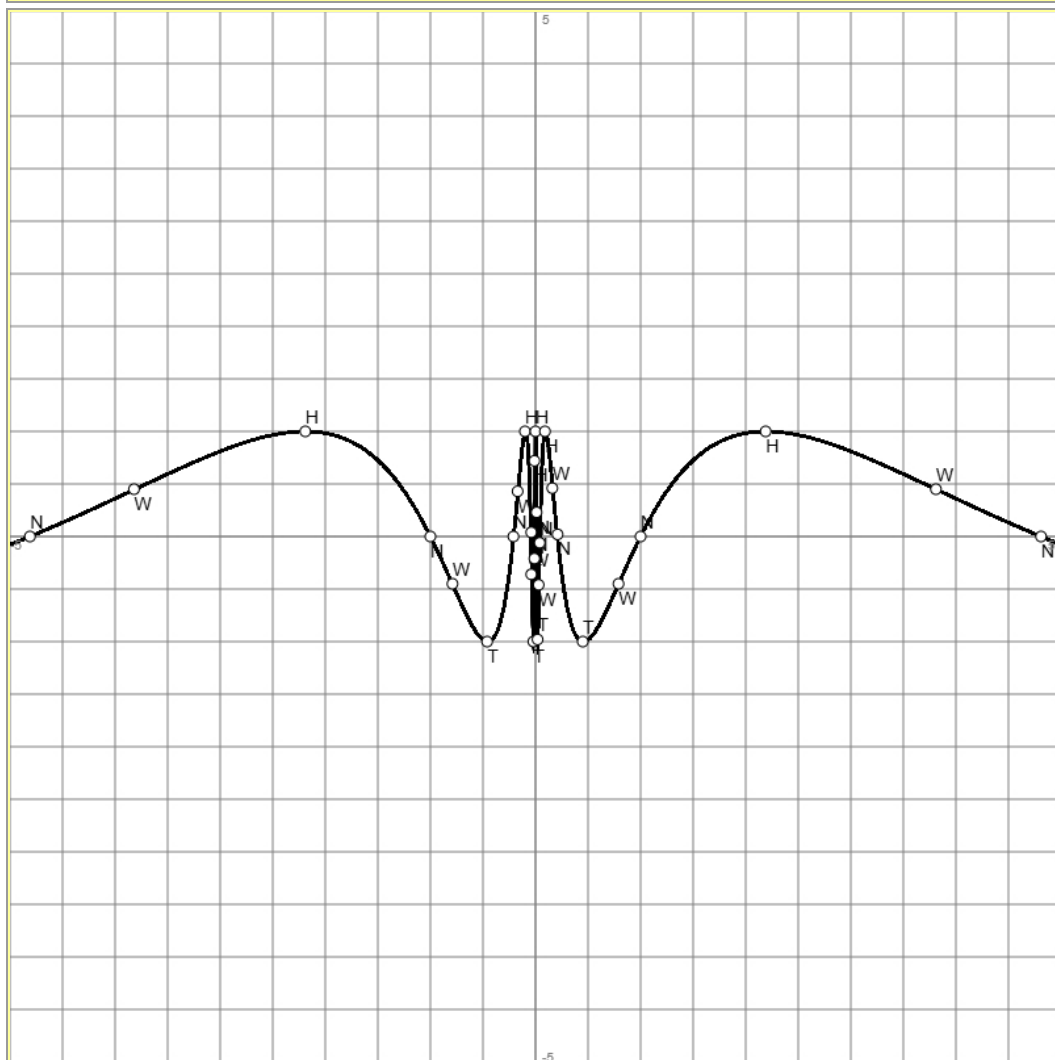
$W(\pm 0,7931e^{k\frac{\pi}{2}}|-0,45)$, $k \in \mathbb{Z}$, ungerade.

VII. Wertetabelle, Zeichnung:

Wertetabelle:				
x	f(x)	f'(x)	f''(x)	Besondere Kurvenpunkte
-5	-0.0772	0.4	0.09	
-4.811	0	0.42	0.09	Nullstelle N(-4.81 0)
-4.5	0.133	0.44	0.07	
-4	0.3607	0.47	0.03	
-3.816	0.4468	0.47	0	Wendepunkt W(-3.82 0.45)
-3.5	0.594	0.46	-0.06	
-3	0.8101	0.39	-0.23	
-2.5	0.9659	0.21	-0.54	
-2.194	1	0	-0.83	Hochpunkt H(-2.19 1)
-2	0.983	-0.18	-1.07	
-1.5	0.7249	-0.92	-1.9	
-1	0	-2	-2	Nullstelle N(-1 0)
-0.794	-0.4452	-2.26	0	Wendepunkt W(-0.79 -0.45)
-0.5	-0.983	-0.73	14.26	
-0.456	-1	0	19.23	Tiefpunkt T(-0.46 -1)
-0.208	-0.0012	9.62	46.33	Nullstelle N(-0.21 0)
-0.165	0.4458	10.85	0	Wendepunkt W(-0.16 0.45)
-0.095	1	0.1	-442.21	Hochpunkt H(-0.09 1)
-0.044	0.036	-45.42	-1106.08	Nullstelle N(-0.04 0)
-0.035	-0.4092	-52.11	0	Wendepunkt W(-0.04 -0.45)
-0.02	-0.9996	-2.74	9860.99	Tiefpunkt T(-0.02 -1)
-0.009	0	221.29	24413.11	Nullstelle N(-0.01 0)
-0.004	1	0	-121704.36	Hochpunkt H(-0.004 1)
-0.002	0	-880.51	-409862.82	Nullstelle N(-0.002 0)
...				
0	-	-	-	Unstetigkeitsstelle x = 0
...				
0.002	0	880.51	-409862.82	Nullstelle N(0.002 0)
0.004	1	0	-263985.32	Hochpunkt H(0.004 1)
0.007	0.4785	-246.29	0	Wendepunkt W(0.01 0.48)
0.019	-0.9974	-7.92	11469.42	Tiefpunkt T(0.02 -1)
0.034	-0.4614	52.15	0	Wendepunkt W(0.03 -0.46)
0.043	-0.0099	46.5	-1059.26	Nullstelle N(0.04 0)
0.094	0.9999	0.35	-456.4	Hochpunkt H(0.09 1)
0.164	0.4566	-10.85	-1.76	Wendepunkt W(0.16 0.46)
0.207	0	-9.66	45.88	Nullstelle N(0.21 0)
0.455	-1	-0.02	19.36	Tiefpunkt T(0.46 -1)

0.5	-0.983	0.73	14.26	
0.793	-0.4474	2.26	0	Wendepunkt W(0.79 -0.45)
1	0	2	-2	Nullstelle N(1 0)
1.5	0.7249	0.92	-1.9	
2	0.983	0.18	-1.07	
2.193	1	0	-0.83	Hochpunkt H(2.19 1)
2.5	0.9659	-0.21	-0.54	
3	0.8101	-0.39	-0.23	
3.5	0.594	-0.46	-0.06	
3.815	0.4473	-0.47	0	Wendepunkt W(3.82 0.45)
4	0.3607	-0.47	0.03	
4.5	0.133	-0.44	0.07	
4.81	0	-0.42	0.09	Nullstelle N(4.81 0)
5	-0.0772	-0.4	0.09	

Graph:



($\mathbb{R}$ = Menge der reellen Zahlen, $\mathbb{Z}$ = Menge der ganzen Zahlen) www.michael-buhlmann.de / 12.2025 / Aufgabe 2567