Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurven (Parameterdarstellung)

Aufgabe: Gegeben sei (für reelle tε[-5; 5]) die Kurve K in der Parameterdarstellung:

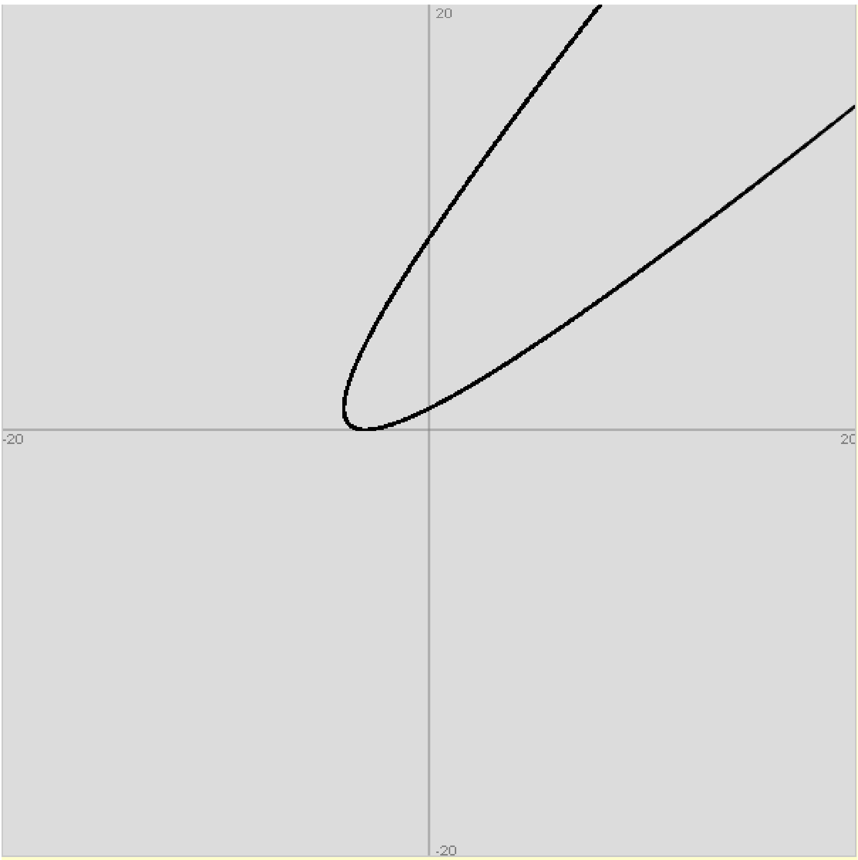
$$x(t) = t^2 - 4$$
$$y(t) = t^2 - 2t + 1$$

im x-y-Koordinatensystem. Berechne den Inhalt der Fläche zwischen Kurve und y-Achse im 2. Quadranten des Koordinatensystems.

1. Lösung: I. Allgemein gilt für Kurven K in Parameterdarstellung x(t), y(t) im x-y-Koordinatensystem: Flächen zwischen Kurve K und den Achsen des Koordinatensystems auf dem t-Intervall [t_1; t_2] lassen sich berechnen als: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x}(t) y(t) dt$ (Fläche zwischen Kurve und x-Achse), weiter als: $A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(t) x(t) dt$ (Fläche zwischen Kurve und y-Achse), wobei $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ die Ableitungen der Kurvenkoordinaten nach dem Parameter t sind.

II. Für die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x(t) = t^2 - 4$, $y(t) = t^2 - 2t + 1$ ergeben sich Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:		
t	x(t)	y(t)
-5	21	36
-4.5	16.25	30.25
-4	12	25
-3.5	8.25	20.25
-3	5	16
-2.5	2.25	12.25
-2	0	9
-1.5	-1.75	6.25
-1	-3	4
-0.5	-3.75	2.25
0	-4	1
0.5	-3.75	0.25
1	-3	0
1.5	-1.75	0.25
2	0	1
2.5	2.25	2.25
3	5	4
3.5	8.25	6.25
4	12	9
4.5	16.25	12.25
5	21	16



Kurve: x(t) = t^2-4
y(t) = t^2-2*t+1

Die Kurve stellt dann eine verschobene und gedrehte Normalparabel dar.

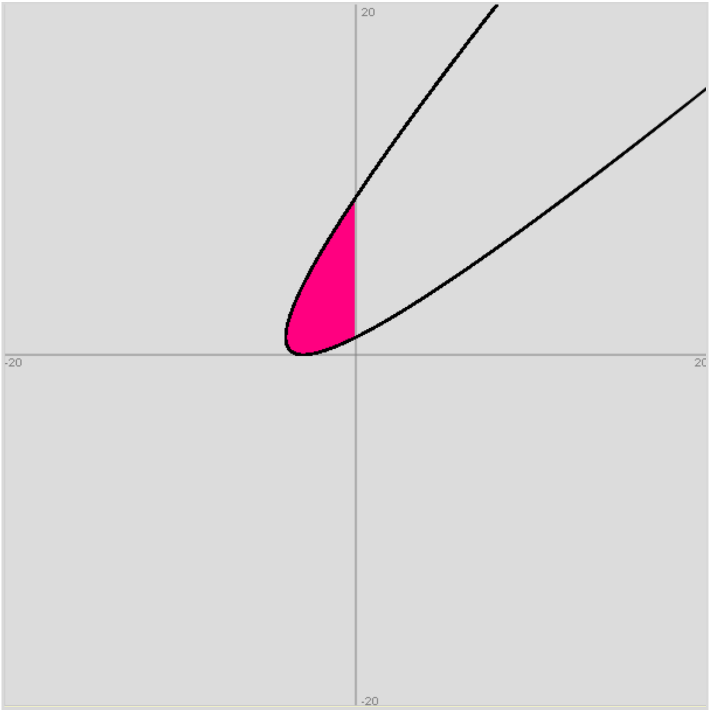
II. Die Kurvenschnittpunkte mit der y-Achse ergeben sich aus der Bedingung: x(t) = 0, also:

$t^2 – 4 = 0 \quad | +4$
$t^2 = 4 \quad | \sqrt{}$
$t = \pm 2$,

woraus aus x(-2) = x(2) = 0 und y(-2) = 9, y(2) = 1 (siehe Wertetabelle) als Schnittpunkte $S_1(0|9)$, $S_2(0|1)$ folgen.

III. Gemäß den oben angeführten Integralformeln bilden wir zunächst die Ableitungen der Koordinaten der Kurve K nach dem Parameter t und erhalten:

$$\dot{x}(t) = 2t$$
$$\dot{y}(t) = 2t - 2.$$



Zur Inhaltsberechnung der Fläche zwischen der Kurve K und der y-Achse im 2. Quadranten des Koordinatensystems ist zwischen den y-Achsenabschnittspunkten $S_1(0|9)$ und $S_2(0|1)$, d.h. zwischen $t_1 = -2$ und $t_2 = 2$ (siehe auch Wertetabelle) zu integrieren. Der Flächeninhalt bestimmt sich auf Grund von $x(t) = t^2 - 4$ und $\dot{y}(t) = 2t - 2$ als:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \dot{y}(t)x(t)dt = \int_{-2}^{2} (2t-2)(t^2-4)dt = \int_{-2}^{2} (2t^3 - 2t^2 - 8t + 8)dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{2t^3}{3} - 4t^2 + 8t\right]_{-2}^{2} =$$

$$\left(8 - \frac{16}{3} - 16 + 16\right) - \left(8 + \frac{16}{3} - 16 - 16\right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{96}{3} - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

2. Lösung: I. Die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x(t) = t^2 - 4$, $y(t) = t^2 - 2t + 1$ lässt sich explizit als reelle „Funktion" f(x) mit zwei Funktionsästen schreiben vermöge der Umformung:

$x(t) = x = t^2 - 4$ | +4
$x + 4 = t^2$ | √
$t = \pm\sqrt{x+4}$.

Einsetzen des Terms $t = \pm\sqrt{x+4}$ in y(t) ergibt:

$$f(x) = y = (\pm\sqrt{x+4})^2 - 2\cdot(\pm\sqrt{x+4}) + 1 = x + 4 \mp 2\sqrt{x+4} + 1 = x + 5 \mp 2\sqrt{x+4}.$$

Die Äste der Wurzel-Parabel-Funktion f(x) sind damit:

$$f_1(x) = x + 5 + 2\sqrt{x+4}$$
$$f_2(x) = x + 5 - 2\sqrt{x+4},$$

Definitionsbereich der Funktionsäste ist $D_f = [-4; \infty)$.

II. Mit den Integrationsgrenzen x = -4 und x = 0 berechnen wir den gesuchten Flächeninhalt zwischen den Funktionsästen $f_1(x) = x + 5 + 2\sqrt{x+4}$ und $f_2(x) = x + 5 - 2\sqrt{x+4}$ im 2. Quadranten des Koordinatensystems. Es ergibt sich dann:

$$A = \int_{-4}^{0} [f_1(x) - f_2(x)]dx = \int_{-4}^{0} \left[\left(x+5+2\sqrt{x+4}\right) - \left(x+5-2\sqrt{x+4}\right)\right]dx = \int_{-4}^{0} 4\sqrt{x+4}dx =$$

$$\left[4 \cdot \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{0} = \left[\frac{8}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}}\right]_{-4}^{0} = \frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{3} \cdot 0^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \cdot 4^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{3} \cdot 2^3 = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}$$

als gesuchter Flächeninhalt.

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 292