Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurven (Parameterdarstellung)

Aufgabe: Gegeben sei für reelle tε[-2; 4] die Kurve K in der Parameterdarstellung:

$$x(t) = 4t + 1$$
$$y(t) = 2t^2$$

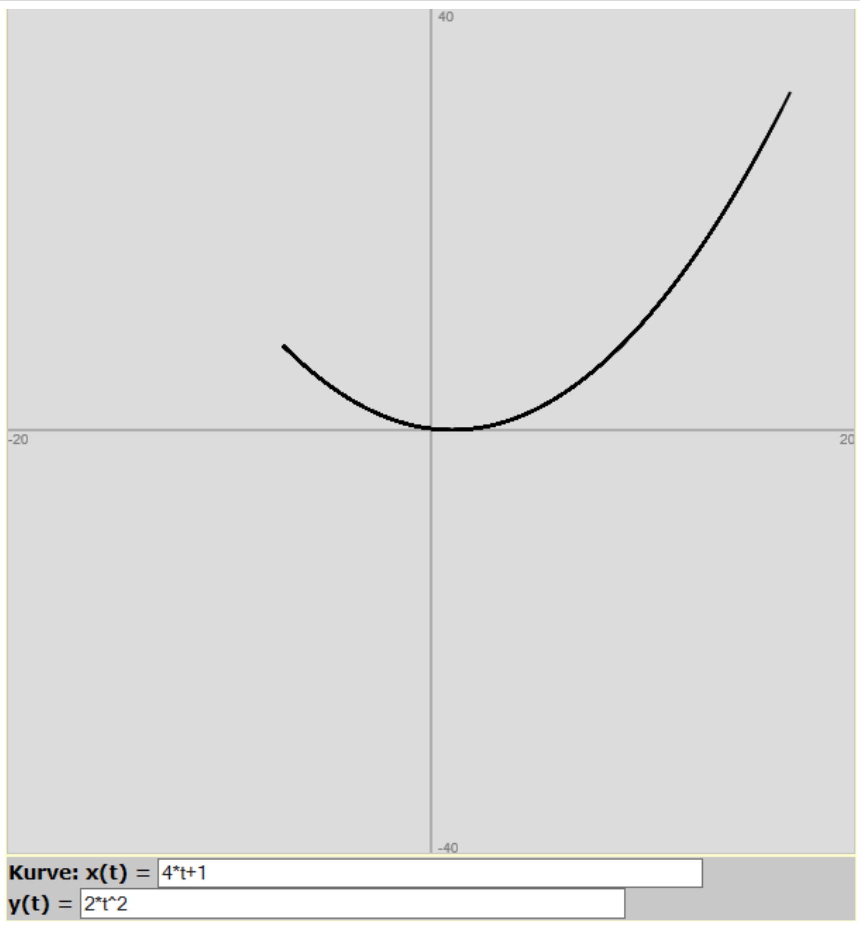
im x-y-Koordinatensystem. Berechne die Bogenlänge der Kurve entlang der Parameter t zwischen -2 und 4.

Lösung: I. Allgemein gilt für Kurven K in Parameterdarstellung x(t), y(t) im x-y-Koordinatensystem: Die Bogenlänge einer Kurve K auf dem t-Intervall [t_1; t_2] lässt sich berechnen als:

$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\,dt$, wobei $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ die Ableitungen der Kurvenkoordinaten nach dem Parameter t sind.

II. Für die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x(t) = 4t + 1$, $y(t) = 2t^2$ ergeben sich Wertetabelle und Graph wie folgt:

Wertetabelle:		
t	**x(t)**	**y(t)**
-2	-7	8
-1.5	-5	4.5
-1	-3	2
-0.5	-1	0.5
0	1	0
0.5	3	0.5
1	5	2
1.5	7	4.5
2	9	8
2.5	11	12.5
3	13	18
3.5	15	24.5
4	17	32



Die Kurve stellt dann eine verschobene allgemeine Parabel dar.

II. Gemäß der oben angeführten Integralformel bilden wir zunächst die Ableitungen der Koordinaten der Kurve K nach dem Parameter t und erhalten:

$\dot{x}(t) = 4$

$\dot{y}(t) = 4t$.

Die Bogenlänge errechnet sich mit Hilfe dieser Ableitungen zunächst als Integral entlang der Parameter zwischen t_1 = -2 und t_2 = 4:

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}\, dt = \int_{-2}^{4} \sqrt{(4)^2 + (4t)^2}\, dt = \int_{-2}^{4} \sqrt{16 + 16t^2}\, dt = 4\int_{-2}^{4} \sqrt{1+t^2}\, dt = (*) .$$

Zur Ermittlung des unbestimmten Integrals in (*) substituieren wir mit t = sinh(u) und dt = cosh(u)du und erhalten:

$$\int \sqrt{1+t^2}\, dt = \int \sqrt{1+\sinh^2 u} \cdot \cosh u du = \int \cosh u \cdot \cosh u du = \int \cosh^2 u du = (**)$$

auf Grund der Identität: $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1 \Leftrightarrow \cosh^2 u = 1 + \sinh^2 u$. Wir rechnen weiter mit:

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2} \Rightarrow \cosh^2 u = \left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right)$$

und erhalten:

$$(**) = \int \frac{1}{4}\left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) du = \frac{1}{4}\int \left(e^{2u} + 2 + e^{-2u}\right) du = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{2u} + 2u - \frac{1}{2}e^{-2u} \right) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\left(e^{2u} - e^{-2u}\right) =$$

$$\frac{1}{2}u + \frac{1}{8}\left(e^u - e^{-u}\right)\left(e^u + e^{-u}\right) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\left(\frac{e^u - e^{-u}}{2} \right)\left(\frac{e^u + e^{-u}}{2} \right) = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}\sinh u \cdot \cosh u = (***)$$

u.a. mit Hilfe der 3. binomischen Formel. Rücksubstitution mit sinh(u) = t, u = arsinh(t) und $\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u) = 1 + t^2 \Rightarrow \cosh(u) = \sqrt{1+t^2}$ führt auf:

$$(***) = \frac{1}{2} ar\sinh t + \frac{1}{2} t \cdot \sqrt{1+t^2} = \frac{1}{2}\left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + ar\sinh t\right) = \frac{1}{2}\left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln(t + \sqrt{1+t^2})\right)$$

wegen der Identität: arsinh(t) = $\ln(t+\sqrt{1+t^2})$. Wir können nun mit unserer Berechnung der Bogenlänge fortfahren und haben:

$$(*) = 4\int_{-2}^{4} \sqrt{1+t^2}\, dt = 4 \cdot \left[\frac{1}{2}\left(t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)\right]_{-2}^{4} = 2 \cdot \left[t \cdot \sqrt{1+t^2} + \ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]_{-2}^{4} =$$

$$2 \cdot \left[4 \cdot \sqrt{17} + \ln(4+\sqrt{17})\right] - 2 \cdot \left[-2 \cdot \sqrt{5} + \ln(-2+\sqrt{5})\right] = 8\sqrt{17} + 4\sqrt{5} + 2\ln\left(\frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{5}-2}\right)$$

und erhalten l ≈ 49 als Bogenlänge.

www.michael-buhlmann.de / 11.2016 / Aufgabe 293