

Mathematikaufgaben

> Analysis

> Kurven (Parameterdarstellung)

Aufgabe: Gegeben sei für reelle $t \geq 0$ die Kurve K in der Parameterdarstellung:

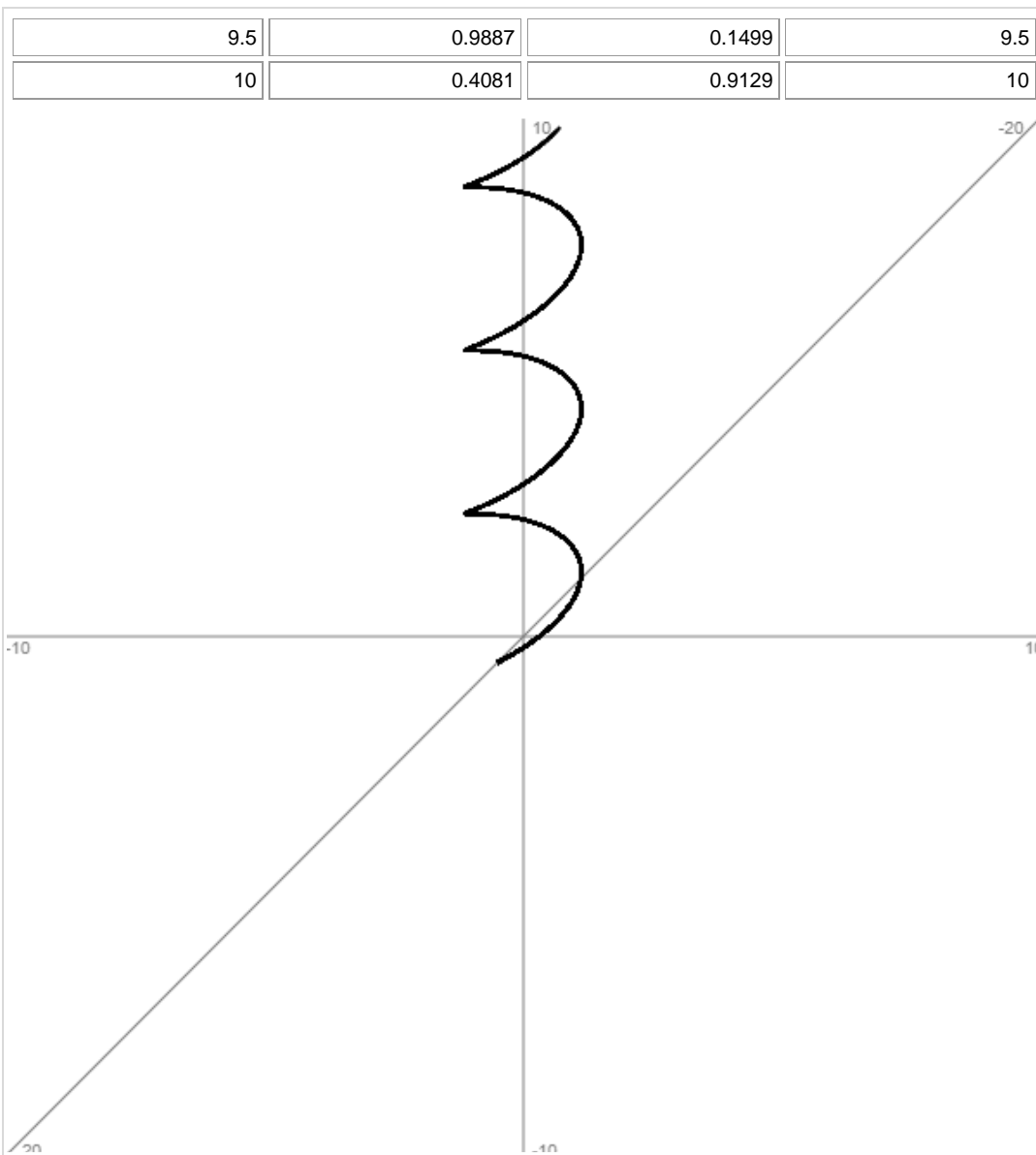
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$$

im x_1 - x_2 - x_3 -Koordinatensystem. Skizziere die Kurve K im Koordinatensystem (Wertetabelle, Graph). Bilde die Ableitung.

Lösung: I. Allgemein gilt für Kurven K im x-y-Koordinatensystem: Für jeden Parameter t (aus dem Definitionsbereich der Kurve) ergibt sich der Kurvenpunkt $P(x_1(t)|x_2(t))$, die Menge aller Kurvenpunkte ist die Kurve K. Die Ableitungen der Parameterkoordinaten $x_1(t)$, $x_2(t)$ nach dem Parameter t sind: $x_1'(t)$, $x_2'(t)$, $x_3'(t)$, wodurch sich der Ableitungsvektor $\vec{x}'(t)$ ergibt.

II. Für die Kurve K in der Parameterdarstellung: $x_1(t) = \cos(2t)$, $x_2(t) = \sin(2t)$, $x_3(t) = t$ ergeben sich Wertetabelle und Graph:

Wertetabelle:			
t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
0	1	0	0
0.5	0.5403	0.8415	0.5
1	-0.4161	0.9093	1
1.5	-0.99	0.1411	1.5
2	-0.6536	-0.7568	2
2.5	0.2837	-0.9589	2.5
3	0.9602	-0.2794	3
3.5	0.7539	0.657	3.5
4	-0.1455	0.9894	4
4.5	-0.9111	0.4121	4.5
5	-0.8391	-0.544	5
5.5	0.0044	-1	5.5
6	0.8439	-0.5366	6
6.5	0.9074	0.4202	6.5
7	0.1367	0.9906	7
7.5	-0.7597	0.6503	7.5
8	-0.9577	-0.2879	8
8.5	-0.2752	-0.9614	8.5
9	0.6603	-0.751	9



Die Kurve stellt eine Spiralfeder dar.

III. Für das Ableiten gilt in den drei Komponenten von $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \sin(2t) \\ t \end{pmatrix}$:

$$x_1'(t) = -2 \sin(2t)$$

$$x_2'(t) = 2 \cos(2t)$$

$$x_3'(t) = 1,$$

so dass sich als Ableitung der Feder $\vec{x}(t)$ ergibt:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 \sin(2t) \\ 2 \cos(2t) \\ 1 \end{pmatrix}.$$