Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Kurvenintegrale

Aufgabe: Berechne das Kurvenintegral:

$$\int_C f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

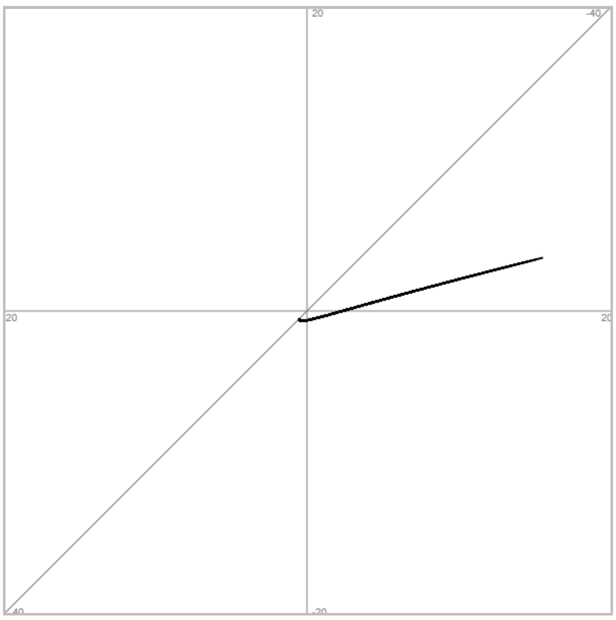
mit der Funktion $f(x,y,z) = x + \frac{9}{16}$ entlang des Weges $\overset{->}{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2+t \\ \sqrt{t^3} \end{pmatrix}$, 0≤t≤4.

Lösung: a) I. Kurvenintegrale (1. Art) von Funktionen f: D $\subset$ $\mathbf{R}^n$ -> $\mathbf{R}$ mit f: (x_1, x_2, … x_n) -> f(x_1, x_2, … x_n) über einer Kurve C: [a; b] -> D mit $\overset{->}{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \ldots \\ c_n(t) \end{pmatrix}$ lassen sich berechnen als:

$$\int_C f(x_1,x_2,\ldots x_n)\,d(x_1,x_2,\ldots x_n) = \int_a^b f(c_1(t),c_2(t),\ldots c_n(t)) \cdot \sqrt{(c_1'(t))^2 + (c_2'(t))^2 + \ldots + (c_n'(t))^2}\,dt\,.$$

Dabei seien alle zugrundeliegenden Funktionen der Einfachheit halber als differenzierbar angenommen.

II. Die Kurve C: $\overset{->}{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2+t \\ \sqrt{t^3} \end{pmatrix}$, 0≤t≤4, beschreibt einen Weg in $\mathbf{R}^3$:

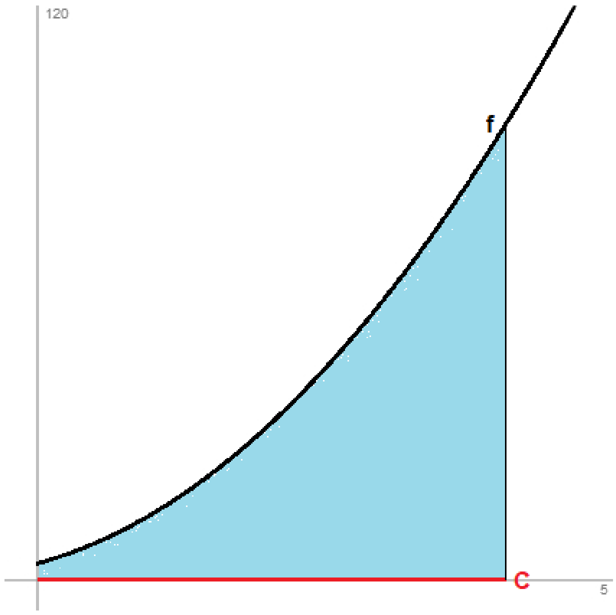


Die Ableitung der Kurve ist: $\vec{c}\,'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2t+1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix}$ mit dem Betrag des Vektors als:

$$\left\| \vec{c}\,'(t) \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2t+1 \\ \frac{3}{2}\sqrt{t} \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{2^2 + (2t+1)^2 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{t}\right)^2} = \sqrt{4 + 4t^2 + 4t + 1 + 2{,}25t} = \sqrt{4t^2 + 6{,}25t + 5}$$

($\| \; \|_2$ als euklidische Norm).

III. Die <u>Funktion</u> $f(x,y,z) = x + \frac{9}{16}$ lässt sich entlang des Weges $\vec{c}(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ t^2+t \\ \sqrt{t^3} \end{pmatrix}$ parametrisieren zu: $f(c_1(t), c_2(t), c_3(t)) = c_1(t) + \frac{9}{16} = 2t + 1 + \frac{9}{16} = 2t + \frac{25}{16}$.



IV. Das <u>Kurvenintegral</u> berechnet sich dann auf der Grundlage der Parametrisierung der Funktion und durch geeignete Substitution und hat den Wert:

$$\int_C f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_C \left(x + \frac{9}{16}\right) d(x,y,z) = \int_0^4 \left(2t + \frac{25}{16}\right)\sqrt{4t^2 + 6{,}25t + 5}\,dt =$$

$$\frac{1}{4}\int_0^4 \left(8t + \frac{25}{4}\right)\sqrt{4t^2 + 6{,}25t + 5}\,dt \underset{\left\{\begin{array}{c} z=4t^2+6{,}25t+5 \\ dz=(8t+\frac{25}{4})dt \\ x=0 \Rightarrow z=5 \\ x=4 \Rightarrow z=94 \end{array}\right\}}{=} \frac{1}{4}\int_5^{94} \sqrt{z}\,dz = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right]_5^{94} = \frac{1}{6}\cdot\left(\sqrt{94^3} - \sqrt{5^3}\right) = 150{,}0306.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2021 / Aufgabe 1530