Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Lineare Optimierung

Aufgabe: Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

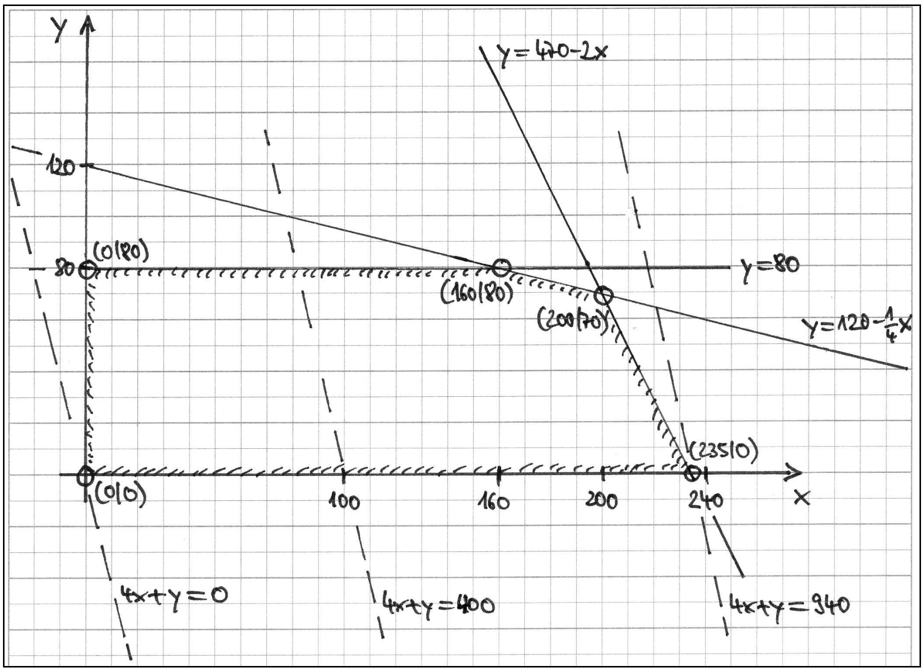
Maximiere die *Zielfunktion*	bzgl. der *Restriktionen*:
$z(x,y) = 4x + y$	$x, y \geq 0$ $x + 4y \leq 480$ $2x + y \leq 470$ $y \leq 80$

Lösung: I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen x, y … besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten x, y … (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion z = z(x,y,…). Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Im Zweidimensionalen lässt sich dann die optimale Lösung (optimale Ecke) – wie nachfolgend – auch grafisch ermitteln.

II. *Schritt 1*: Wir bestimmen den zulässigen Bereich, indem wir den Rand des aus den Nebenbedingungen resultierenden Vielecks durch die mit den Gleichungen verbundenen Gleichungen beschreiben. Es gilt:

1) $x = 0$ (y-Achse)
2) $y = 0$ (x-Achse)
3) $x + 4y = 480 \Leftrightarrow 4y = 480 - x \Leftrightarrow y = 120 - \frac{1}{4}x$
4) $2x + y = 470 \Leftrightarrow y = 470 - 2x$
5) $y = 80$.

Der zulässige Bereich hat einschließlich verschiedener Niveaulinien der Zielfunktion das Aussehen:



Schritt 2: Wir bestimmen die Eckpunkte des zulässigen Bereichs:

1) x=0, y=0: $P_1(0|0)$
2) y=0, y = 470 – 2x: 470 – 2x = 0 ⇔ 2x = 470 ⇔ x = 235: y=0, $P_2(235|0)$
3) $y = 120 - \frac{1}{4}x$, y = 470 – 2x: $120 - \frac{1}{4}x = 470 - 2x \Leftrightarrow 2x - \frac{1}{4}x = 350 \Leftrightarrow \frac{7}{4}x = 350 \Leftrightarrow x = 200$:
$y = 470 - 2\cdot 200 = 70$, $P_3(200|70)$
4) $y = 120 - \frac{1}{4}x$, y=80: $120 - \frac{1}{4}x = 80 \Leftrightarrow 40 = \frac{1}{4}x \Leftrightarrow x = 160$: y=80, $P_4(160|80)$
5) x=0, y=80: $P_5(0|80)$

Schritt 3: Wir bestimmen die Werte der Zielfunktion an den Punkten P_1 bis P_5. Es gilt mit der Zielfunktion $z = z(x,y) = 4x + y$:

1) $P_1(0|0)$: $z = z(0,0) = 0 + 0 = 0$
2) $P_2(235|0)$: $z = z(235,0) = 4\cdot 235 = 940$
3) $P_3(200|70)$: $z = z(200,70) = 800 + 70 = 870$
4) $P_4(160|80)$: $z = z(160,80) = 640 + 80 = 720$
5) $P_5(0|80)$: $z = z(0,80) = 0 + 80 = 80$

Schritt 4: Die Zielfunktion ist zu maximieren, der Punkt mit dem größten Zielfunktionswert z = 940 ist: $P_2(235|0)$.

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 127