

# Mathematikaufgaben

## > Operations Research

## > Lineare Optimierung

---

**Aufgabe:** Gegeben ist das folgende lineare Optimierungsproblem:

*Nichtnegativität:*  $x_1, x_2 \geq 0$   
1. *Restriktion:*  $+ 15x_1 + 45x_2 \leq 450$   
2. *Restriktion:*  $+ 40x_1 + 40x_2 \leq 480$   
3. *Restriktion:*  $+ 68x_1 + 34x_2 \leq 476$   
*Zielfunktion:*  $+ 40x_1 + 30x_2 = z \rightarrow \text{Maximum}$

**Lösung:** I. Vorüberlegungen: Ein Problem der linearen Optimierung hinsichtlich reeller Variablen  $x_1, x_2 \dots$  besteht aus einem System von linearen Ungleichungen mit den Unbekannten  $x_1, x_2 \dots$  (Nebenbedingungen, Restriktionen) und einer zu minimierenden oder zu maximierenden linearen Zielfunktion  $z = z(x_1, x_2, \dots)$ . Die Bedingungen spannen dann ein mehrdimensionales Vieleck (Simplex), den zulässigen Bereich, auf, z.B. im Zweidimensionalen ein konvexes Vieleck mit den für die Lösung des Optimierungsproblems wichtigen Eckpunkten. Das Verfahren, das Probleme der linearen Optimierung löst, ist – siehe II. – das Simplexverfahren.

II. Wir verwenden das Simplexverfahren wie folgt:

(Zweidimensionales) lineares Optimierungsproblem: 2 Variablen, 3 Restriktion(en), Nichtnegativitätsbedingungen, Zielfunktion

*Nichtnegativität:*  $x_1, x_2 \geq 0$   
1. *Restriktion:*  $+ 15x_1 + 45x_2 \leq 450$   
2. *Restriktion:*  $+ 40x_1 + 40x_2 \leq 480$   
3. *Restriktion:*  $+ 68x_1 + 34x_2 \leq 476$   
*Zielfunktion:*  $+ 40x_1 + 30x_2 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Einführung von Schlupfvariablen: 3 Schlupfvariable(n)

*Nichtnegativität:*  $x_1, x_2 \geq 0$   
 $u_1, u_2, u_3 \geq 0$   
1. *Restriktion:*  $+ 15x_1 + 45x_2 + 1u_1 = 450$   
2. *Restriktion:*  $+ 40x_1 + 40x_2 + 1u_2 = 480$   
3. *Restriktion:*  $+ 68x_1 + 34x_2 + 1u_3 = 476$   
*Zielfunktion:*  $+ 40x_1 + 30x_2 = z \rightarrow \text{Maximum}$

Anfangstableau: \* = Basisvariable

	$x_1$	$x_2$	* $u_1$	* $u_2$	* $u_3$		$b$	$z$
1. <i>Restriktion:</i>	15	45	1	0	0		450	0
2. <i>Restriktion:</i>	40	40	0	1	0		480	0
3. <i>Restriktion:</i>	68	34	0	0	1		476	0
<i>Zielfunktion:</i>	40	30	0	0	0		0	1

Ecke:  $x_1 = 0, x_2 = 0, u_1 = 450, u_2 = 480, u_3 = 476, z = 0$

1. Schritt: Pivotzeile = 3, Pivotspalte = 1:  $68 \cdot (1) - 15 \cdot (3) / 17 \cdot (2) - 10 \cdot (3) / 17 \cdot (Z) - 10 \cdot (3) /$

$*x_1 \quad x_2 \quad *u_1 \quad *u_2 \quad u_3 \quad | \quad b \quad z$

1. Restriktion: 0 2550 68 0 -15 | 23460 0

2. Restriktion: 0 340 0 17 -10 | 3400 0

3. Restriktion: 68 34 0 0 1 | 476 0

Zielfunktion: 0 170 0 0 -10 | -4760 17

Ecke:  $x_1 = 7, x_2 = 0, u_1 = 345, u_2 = 200, u_3 = 0, z = 280$

2. Schritt: Pivotzeile = 1, Pivotspalte = 2:  $15 \cdot (2) - 2 \cdot (1) / 75 \cdot (3) - 1 \cdot (1) / 15 \cdot (Z) - 1 \cdot (1) /$

$*x_1 \quad *x_2 \quad u_1 \quad *u_2 \quad u_3 \quad | \quad b \quad z$

1. Restriktion: 0 2550 68 0 -15 | 23460 0

2. Restriktion: 0 0 -136 255 -120 | 4080 0

3. Restriktion: 5100 0 -68 0 90 | 12240 0

Zielfunktion: 0 0 -68 0 -135 | -94860 255

Ecke:  $x_1 = 2.4, x_2 = 9.2, u_1 = 0, u_2 = 16, u_3 = 0, z = 372$

Optimale Ecke:  $x_1 = 2.4, x_2 = 9.2, u_1 = 0, u_2 = 16, u_3 = 0, z = 372$

www.michael-buhlmann.de / 08.2015 / Aufgabe 137