Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Operations Research
> Transportproblem

Aufgabe: Formuliere ein Transportproblem im Rahmen der linearen Optimierung zur folgenden Distributionssituation:

Ein Unternehmen produziert in einer Zeitperiode eine Ware in zwei Fabriken. Die Ware wird zu zwei Lagern transportiert, von wo sie an vier Kunden verteilt wird, die bestimmte Warenmengen bestellt haben.

Produktion und Lagerhaltung unterliegen jeweiligen Kapazitätsbeschränkungen, die der folgenden Tabelle zu entnehmen sind:

Produktion	Produktions-beschränkung (ME)	Lager	Lagerkapazitäten (ME)
Fabrik I	200	Lager 1	250
Fabrik II	300	Lager 2	150

Die Bestellmengen der Kunden sind:

Kunde	Bestellmenge (ME)	Kunde	Bestellmenge (ME)
Kunde A	80	Kunde C	120
Kunde B	100	Kunde D	70

Bei Produktion, Lagerhaltung und Transport fallen die nachstehenden Kosten an:

Produktion	Kosten (GE/ME)	Lager	Kosten (GE/ME)
Fabrik I	12	Lager 1	4
Fabrik II	18	Lager 2	2

Produktion | Lager	Lager 1	Lager 2	
Fabrik I	1	2	Transportkosten (GE/ME)
Fabrik II	3	2	

Lager | Kunde	Kunde A	Kunde B	Kunde C	Kunde D	
Lager 1	2	1	3	4	Transportkosten (GE/ME)
Lager 2	3	4	2	2	

GE = Geldeinheit, ME = Mengeneinheit

Die anfallenden Kosten sollen minimiert werden.

Lösung: I. Wir führen zunächst geeignete Variablen für das zu erstellende lineare Optimierungsproblem ein. Die von den Fabriken zu den Lagern transportierten (Teil-) Mengen der produzierten Mengen heißen x_{11}, x_{12}, x_{21} und x_{22} (x_{ij} als transportierte Menge zwischen Fabrik i und Lager j, $1 \le i,j \le 2$), die von den Lagern zu den Kunden transportierten Mengen y_{1A}, y_{1B}, y_{1C}, y_{1D}, y_{2A}, y_{2B}, y_{2C}, y_{2D} (y_{iA}, … als transportierte Menge zwischen Lager i und Kunde A, …, $1 \le i \le 2$). Die Produktionsmengen in den Fabriken ergeben sich dann als $x_{11}+x_{12}$ (Fabrik I) und $x_{21}+x_{22}$ (Fabrik II), die Bestellmengen der Kunden lauten auf: $y_{1A} + y_{2A}$ (Kunde A), $y_{1B} + y_{2B}$ (Kunde B), $y_{1C} + y_{2C}$ (Kunde C), $y_{1D} + y_{2D}$ (Kunde D).

II. Zu den Variablen erstellen wir die folgenden Restriktionen (R) gemäß den oben aufgeführten Produktions- und Lagerhaltungsbeschränkungen:

R1: $x_{11}+x_{12} \le 200$ (Fabrik I: Produktionsmenge)
R2: $x_{21}+x_{22} \le 300$ (Fabrik II: Produktionsmenge)
R3: $x_{11} + x_{21} \le 250$ (Lager 1: Lagerkapazitäten)
R4: $x_{12} + x_{22} \le 150$ (Lager 2: Lagerkapazitäten)
R5: $x_{11} + x_{21} \ge y_{1A} + y_{1B} + y_{1C} + y_{1D}$ (Lieferung von Lager 1 an Kunden A, B, C, D)

R6: $x_{12} + x_{22} \geq y_{2A} + y_{2B} + y_{2C} + y_{2D}$ (Lieferung von Lager 2 an Kunden A, B, C, D)
R7: $y_{1A} + y_{2A} = 80$ (Kunde A: Bestellmenge)
R8: $y_{1B} + y_{2B} = 100$ (Kunde B: Bestellmenge)
R9: $y_{1C} + y_{2C} = 120$ (Kunde C: Bestellmenge)
R10: $y_{1D} + y_{2D} = 70$ (Kunde D: Bestellmenge)
Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen.

Die Zielfunktion des linearen Optimierungsproblem ist die zu minimierende Kostenfunktion:

$z = 12(x_{11}+x_{12}) + 18(x_{21}+x_{22}) +$	(Produktionskosten)
$x_{11} + 2x_{12} + 3x_{21} + 2x_{22} +$	(Transportkosten Fabriken-Lager)
$4(x_{11}+x_{12}) + 2(x_{21}+x_{22}) +$	(Lagerkosten)
$2y_{1A} + y_{1B} + 3y_{1C} + 4y_{1D} +$	(Transportkosten Lager 1-Kunden)
$3y_{2A} + 4y_{2B} + 2y_{2C} + 2y_{2D} +$	(Transportkosten Lager 2-Kunden)

III. Umformungen in den Restriktionen und in der Zielfunktion ergeben dann das lineare Optimierungsproblem:

$z = 17x_{11} + 15x_{12} + 23x_{21} + 22x_{22} + 2y_{1A} + y_{1B} + 3y_{1C} + 4y_{1D} + 3y_{2A} + 4y_{2B} + 2y_{2C} + 2y_{2D}$ -> min.

bzgl. der Restriktionen:
R1: $x_{11}+x_{12} \leq 200$ (Fabrik I: Produktionsmenge)
R2: $x_{21}+x_{22} \leq 300$ (Fabrik II: Produktionsmenge)
R3: $x_{11} + x_{21} \leq 250$ (Lager 1: Lagerkapazitäten)
R4: $x_{12} + x_{22} \leq 150$ (Lager 2: Lagerkapazitäten)
R5: $x_{11} + x_{21} - y_{1A} - y_{1B} - y_{1C} - y_{1D} \geq 0$ (Lieferung von Lager 1 an Kunden A, B, C, D)
R6: $x_{12} + x_{22} - y_{2A} - y_{2B} - y_{2C} - y_{2D} \geq 0$ (Lieferung von Lager 2 an Kunden A, B, C, D)
R7: $y_{1A} + y_{2A} = 80$ (Kunde A: Bestellmenge)
R8: $y_{1B} + y_{2B} = 100$ (Kunde B: Bestellmenge)
R9: $y_{1C} + y_{2C} = 120$ (Kunde C: Bestellmenge)
R10: $y_{1D} + y_{2D} = 70$ (Kunde D: Bestellmenge)
Nichtnegativitätsbedingungen für alle Variablen.

www.michael-buhlmann.de / 02.2017 / Aufgabe 309