

Mathematikaufgaben

> Lineare Algebra

> Determinanten

Aufgabe: Bestimme die Determinante der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung: I. Determinanten von reell besetzten quadratischen $n \times n$ -Matrizen A sind reelle Zahlen $\det(A) = |A|$ von der (rekursiv definierten) Form:

$$\underline{n=2}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\underline{n=3}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

(Sarrusregel)

$$\underline{n>3}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-12} \dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

Die Determinanten genügen den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{i1} & ra_{i2} & \dots & ra_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1, \dots, n; r \text{ reell}) (*)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ra_{11} & a_{i2} + ra_{12} & \dots & a_{in} + ra_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1, \dots, n; r \text{ reell}) \text{ u.ä. (**),}$$

d.h.: Determinanten sind in jeder Zeile linear bzgl. dem Zeilenvielfachen und der Addition von Zeilen. Dasselbe gilt für die Spalten der Determinante auf Grund von:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

mit A^T als transponierter Matrix. Zudem ist – Invertierbarkeit der Matrix vorausgesetzt – die Determinante der inversen Matrix A^{-1} :

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)},$$

woraus im Übrigen folgt, dass eine Matrix A invertierbar ist, wenn $\det(A) \neq 0$ gilt. Ist die Matrix A eine Matrix in Dreiecksgestalt (Stufenform), so gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \quad (***)$$

d.h.: die Determinante errechnet sich als Produkt der Diagonalelemente der Matrix.

II. Die Beziehungen (*), (**), (***) geben nun Anlass bei der Berechnung der Determinante der Matrix A diese Matrix in eine Matrix in Dreiecksgestalt umzuformen, was mit Hilfe des Gauß-Verfahrens erfolgen kann.

Gegeben ist die Matrix A mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch die Dreiecksgestalt einer Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Addiert man dabei Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, ändert sich der Wert der Determinante nicht; er ändert sich vom Vorzeichen, wenn Zeilen vertauscht werden, er ändert sich um ein Vielfaches r , wenn eine Zeile mit r multipliziert wird. Damit gilt:

$$\det(A) = (-1)^v \cdot \frac{1}{r_2 \dots r_n} \cdot \det(A^*)$$

mit v als Anzahl der Zeilenvertauschungen und r_2, \dots, r_n als Faktoren (auch 1), mit denen Zeilen multipliziert wurden. Die beschriebene Vorgehensweise garantiert das Rechnen mit ganzen Zahlen, wenn die Matrix A nur ganzzahlige Komponenten besitzt.

III. Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor und haben die Umformungen:

Matrix -> Dreiecksmatrix:

Matrix -> Anfangstableau:

```
0 1 0 0 1
1 0 0 5 0
0 0 1 0 0
0 -2 0 0 0
1 0 0 0 1
```

Zeilentausch: (1) <-> (2) -> Zeilentausch 1 /

```
1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 -2 0 0 0
1 0 0 0 1
```

1. Schritt: $1 \cdot (5) - 1 \cdot (1)$ -> Faktor 1 /

```
1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 -2 0 0 0
0 0 0 -5 1
```

2. Schritt: $1 \cdot (4) + 2 \cdot (2)$ -> Faktor 1 /

```
1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 0 0 0 2
0 0 0 -5 1
```

3. Schritt: (keine Umformung) /

```
1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 0 0 0 2
0 0 0 -5 1
```

Zeilentausch: (4) <-> (5) -> Zeilentausch 2 /

```
1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 0 0 -5 1
0 0 0 0 2
```

4. Schritt: (keine Umformung) /

```
1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 0 0 -5 1
0 0 0 0 2
```

Endtableau:

1 0 0 5 0
0 1 0 0 1
0 0 1 0 0
0 0 0 -5 1
0 0 0 0 2

Matrix -> Determinante:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^2 * \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} / \underline{1} = -10.$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1291