**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Lineare Algebra
## > Determinanten

---

**Aufgabe**: Bestimme die Determinante der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Matrizen $A^2$, $A^3$, $A^4$ und $A^{2021}$ und die Matrixinverse $A^{-1}$.

**1. Lösung**: I. <u>Determinanten</u> von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

<u>n=2</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

<u>n=3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

<u>n>3</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-11}\dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

Die Determinanten genügen den folgenden Eigenschaften:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{i1} & ra_{i2} & \dots & ra_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ (i=1, … n; r reell) (*)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+ra_{11} & a_{i2}+ra_{12} & \dots & a_{in}+ra_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ (i=1, … n; r reell) u.ä. (**),

d.h.: Determinanten sind in jeder Zeile linear bzgl. dem Zeilenvielfachen und der Addition von Zeilen. Dasselbe gilt für die Spalten der Determinante auf Grund von:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

mit $A^T$ als transponierter Matrix. Zudem ist – Invertierbarkeit der Matrix vorausgesetzt – die Determinante der inversen Matrix $A^{-1}$:

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)},$$

woraus im Übrigen folgt, dass eine Matrix A invertierbar ist, wenn det(A) ≠ 0 gilt. Ist die Matrix A eine Matrix in Dreiecksgestalt (Stufenform), so gilt:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn} \quad (***),$$

d.h.: die Determinante errechnet sich als Produkt der Diagonalelemente der Matrix.

II. Die Beziehungen (*), (**), (***) geben nun Anlass bei der Berechnung der Determinante der Matrix A diese Matrix in eine Matrix in Dreiecksgestalt umzuformen, was mit Hilfe des Gauß-Verfahrens erfolgen kann.

Gegeben ist die Matrix A mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{nn} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch die Dreiecksgestalt einer Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Addiert man dabei Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, ändert sich der Wert der Determinante nicht; er ändert sich vom Vorzeichen, wenn Zeilen vertauscht werden, er ändert sich um ein Vielfaches r, wenn eine Zeile mit r multipliziert wird. Damit gilt:

$$\det(A) = (-1)^v \cdot \frac{1}{r_2 \ldots r_n} \cdot \det(A^*)$$

mit v als Anzahl der Zeilenvertauschungen und $r_2, \ldots r_n$ als Faktoren (auch 1), mit denen Zeilen multipliziert wurden. Die beschriebene Vorgehensweise garantiert das Rechnen mit ganzen Zahlen, wenn die Matrix A nur ganzzahlige Komponenten besitzt.

III. Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor und haben die Umformungen:

Matrix -> Dreiecksmatrix:

Matrix A -> Anfangstableau:

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Zeilentausch: (*1*) <-> (*3*) -> Zeilentausch *1* /

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

1. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Zeilentausch: (*2*) <-> (*3*) -> Zeilentausch *2* /

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

3. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Endtableau:

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Matrix -> Determinante:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^2 * \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} / \underline{1} = 1$$

IV. Die Matrixmultiplikation von zwei *mxn*- bzw. *nxp*-Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als *mxp*-Matrix.

V. Damit gilt:

Matrixpotenzierung:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist also: $A^3 = E$, $A^4 = A$, woraus folgt: $A^7 = A^4 \cdot A^3 = A \cdot E = A$, $A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot E = A$, … Es ergibt sich:

$A^{3n} = E$, $A^{3n+1} = A$, $A^{3n+2} = A^2$, n$\varepsilon$**N.**

Nun gilt wegen: 2021:3 = 673 Rest 2 die folgende Berechnung:

$A^{2021} = A^{2019} \cdot A^2 = (A^3)^{673} \cdot A^2 = E \cdot A^2 = A^2$, so dass

$$A^{2021} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

folgt.

VI. Ebenfalls mit dem Gaußschen Algorithmus gelten die folgenden Umformungen:

Matrix A | Einheitsmatrix E ->

<u>Anfangstableau</u>:

0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

<u>Zeilentausch</u>: (*1*) <-> (*3*) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

<u>1. Schritt</u>: (keine Umformung) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

<u>Zeilentausch</u>: (*2*) <-> (*3*) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

<u>2. Schritt</u>: (keine Umformung) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

<u>3. Schritt</u>: (keine Umformung) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

<u>4. Schritt</u>: (keine Umformung) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

5. Schritt: (keine Umformung) /

1 0 0 0 | 0 0 1 0
0 1 0 0 | 1 0 0 0
0 0 1 0 | 0 1 0 0
0 0 0 1 | 0 0 0 1

-> Einheitsmatrix E | Matrix $A^{-1}$
-> Inverse Matrix existiert.

Die Matrixinverse lautet damit:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**2. Lösung**: I. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

n=2: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

n=3: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

(Sarrusregel)

n>3: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \ldots a_{2n} \\ a_{32} \ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{32} \ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{32} \ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \ \ldots \ a_{1n} \\ a_{32} \ \ldots \ a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n-11} \ldots a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

II. Wir verwenden den Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten und haben:

det(A) = $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

mit der Determinantenentwicklung nach der 1. Spalte und der Determinante der Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ als 1 (als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen).

III. Die Matrixmultiplikation von zwei *m*x*n*- bzw. *n*x*p*-Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als *mxp*-Matrix.

IV. Damit gilt:

Matrixpotenzierung:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist also: $A^3 = E$, $A^4 = A$, woraus folgt: $A^7 = A^4 \cdot A^3 = A \cdot E = A$, $A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot E = A$, … Es ergibt sich:

$A^{3n} = E$, $A^{3n+1} = A$, $A^{3n+2} = A^2$, $n \varepsilon \mathbf{N}$.

Nun gilt wegen: 2021:3 = 673 Rest 2 die folgende Berechnung:

$A^{2021} = A^{2019} \cdot A^2 = (A^3)^{673} \cdot A^2 = E \cdot A^2 = A^2$,
so dass

$$A^{2021} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

folgt.

VI. Die Ergebnisse der Matrixpotenzierung (siehe V.) führen sofort auf:
$A^3 = E \Leftrightarrow A \cdot A^2 = E = A \cdot A^{-1}$,
so dass offensichtlich:#
$A^{-1} = A^2$
gilt. Die Matrixinverse lautet damit:

$$A^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1312