

# Mathematikaufgaben

## > Lineare Algebra

### > Determinanten

**Aufgabe:** Bestimme die Determinante der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Matrizen  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  und  $A^{2021}$  und die Matrixinverse  $A^{-1}$ .

**1. Lösung:** I. Determinanten von reell besetzten quadratischen  $n \times n$ -Matrizen  $A$  sind reelle Zahlen  $\det(A) = |A|$  von der (rekursiv definierten) Form:

$$\underline{n=2}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\underline{n=3}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

(Sarrusregel)

$$\underline{n \geq 3}: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-12} \dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

Die Determinanten genügen den folgenden Eigenschaften:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ra_{i1} & ra_{i2} & \dots & ra_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1, \dots, n; r \text{ reell}) \quad (*)$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + ra_{11} & a_{i2} + ra_{12} & \dots & a_{in} + ra_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1, \dots, n; r \text{ reell}) \text{ u.ä. (**),}$$

d.h.: Determinanten sind in jeder Zeile linear bzgl. dem Zeilenvielfachen und der Addition von Zeilen. Dasselbe gilt für die Spalten der Determinante auf Grund von:

$$\det(A) = \det(A^T)$$

mit  $A^T$  als transponierter Matrix. Zudem ist – Invertierbarkeit der Matrix vorausgesetzt – die Determinante der inversen Matrix  $A^{-1}$ :

$$\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = \frac{1}{\det(A)},$$

woraus im Übrigen folgt, dass eine Matrix  $A$  invertierbar ist, wenn  $\det(A) \neq 0$  gilt. Ist die Matrix  $A$  eine Matrix in Dreiecksgestalt (Stufenform), so gilt:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \quad (***)$$

d.h.: die Determinante errechnet sich als Produkt der Diagonalelemente der Matrix.

II. Die Beziehungen (\*), (\*\*), (\*\*\*) geben nun Anlass bei der Berechnung der Determinante der Matrix  $A$  diese Matrix in eine Matrix in Dreiecksgestalt umzuformen, was mit Hilfe des Gauß-Verfahrens erfolgen kann.

Gegeben ist die Matrix  $A$  mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist  $a$  das erste Element in Zeile 1 und  $b$  das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit  $a$  multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit  $b$  multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (\*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen  $a$  und  $b$ ). Ist  $a$  das erste Element in Zeile 1 und  $b$  das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (\*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist  $a$  das zweite Element in Zeile 2 und  $b$  das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (\*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch die Dreiecksgestalt einer Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Addiert man dabei Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, ändert sich der Wert der Determinante nicht; er ändert sich vom Vorzeichen, wenn Zeilen vertauscht werden, er ändert sich um ein Vielfaches  $r$ , wenn eine Zeile mit  $r$  multipliziert wird. Damit gilt:

$$\det(A) = (-1)^v \cdot \frac{1}{r_2 \dots r_n} \cdot \det(A^*)$$

mit  $v$  als Anzahl der Zeilenvertauschungen und  $r_2, \dots, r_n$  als Faktoren (auch 1), mit denen Zeilen multipliziert wurden. Die beschriebene Vorgehensweise garantiert das Rechnen mit ganzen Zahlen, wenn die Matrix  $A$  nur ganzzahlige Komponenten besitzt.

III. Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor und haben die Umformungen:

Matrix -> Dreiecksmatrix:

Matrix  $A$  -> Anfangstableau:

0 1 0 0  
 0 0 1 0  
 1 0 0 0  
 0 0 0 1

Zeilentausch: (1) <-> (3) -> Zeilentausch 1 /

1 0 0 0  
 0 0 1 0  
 0 1 0 0  
 0 0 0 1

1. Schritt: (keine Umformung) /

1 0 0 0  
 0 0 1 0  
 0 1 0 0  
 0 0 0 1

Zeilentausch: (2) <-> (3) -> Zeilentausch 2 /

1 0 0 0  
 0 1 0 0  
 0 0 1 0  
 0 0 0 1

2. Schritt: (keine Umformung) /

1 0 0 0  
 0 1 0 0  
 0 0 1 0  
 0 0 0 1

3. Schritt: (keine Umformung) /

1 0 0 0  
 0 1 0 0  
 0 0 1 0  
 0 0 0 1

Endtableau:

1 0 0 0  
 0 1 0 0  
 0 0 1 0  
 0 0 0 1

Matrix -> Determinante:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-1)^2 * \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} / \underline{1} = 1$$

IV. Die Matrixmultiplikation von zwei  $m \times n$ - bzw.  $n \times p$ -Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{ip} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als  $m \times p$ -Matrix.

V. Damit gilt:

Matrixpotenzierung:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist also:  $A^3 = E$ ,  $A^4 = A$ , woraus folgt:  $A^7 = A^4 \cdot A^3 = A \cdot E = A$ ,  $A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot E = A$ , ... Es ergibt sich:

$$A^{3n} = E, A^{3n+1} = A, A^{3n+2} = A^2, n \in \mathbf{N}.$$

Nun gilt wegen:  $2021:3 = 673 \text{ Rest } 2$  die folgende Berechnung:

$$A^{2021} = A^{2019} \cdot A^2 = (A^3)^{673} \cdot A^2 = E \cdot A^2 = A^2,$$

so dass

$$A^{2021} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

folgt.

VI. Ebenfalls mit dem Gaußschen Algorithmus gelten die folgenden Umformungen:

Matrix A | Einheitsmatrix E ->

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Zeilentausch: (1) <-> (3) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

1. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Zeilentausch: (2) <-> (3) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

4. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

4. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

-> Einheitsmatrix E | Matrix  $A^{-1}$

-> Inverse Matrix existiert.

Die Matrixinverse lautet damit:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**2. Lösung:** I. Determinanten von reell besetzten quadratischen  $n \times n$ -Matrizen A sind reelle Zahlen  $\det(A) = |A|$  von der (rekursiv definierten) Form:

$$n=2: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$n=3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} a_{11} a_{12} = \begin{cases} + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

(Sarrusregel)

$$n>3: \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \begin{vmatrix} a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{32} \dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-11} \dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

II. Wir verwenden den Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten und haben:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

mit der Determinantenentwicklung nach der 1. Spalte und der Determinante der Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ als 1 (als Produkt der Elemente der Hauptdiagonalen).}$$

III. Die Matrixmultiplikation von zwei  $m \times n$ - bzw.  $n \times p$ -Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{1i} b_{ip} \\ \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{2i} b_{ip} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{i1} & \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{i2} & \dots & \sum_{i=1}^n a_{mi} b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als  $m \times p$ -Matrix.

IV. Damit gilt:

Matrixpotenzierung:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ist also:  $A^3 = E$ ,  $A^4 = A$ , woraus folgt:  $A^7 = A^4 \cdot A^3 = A \cdot E = A$ ,  $A^{10} = A^7 \cdot A^3 = A \cdot E = A$ , ... Es ergibt sich:

$$A^{3n} = E, A^{3n+1} = A, A^{3n+2} = A^2, n \in \mathbf{N}.$$

Nun gilt wegen:  $2021:3 = 673 \text{ Rest } 2$  die folgende Berechnung:

$$A^{2021} = A^{2019} \cdot A^2 = (A^3)^{673} \cdot A^2 = E \cdot A^2 = A^2,$$

so dass

$$A^{2021} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

folgt.

VI. Die Ergebnisse der Matrixpotenzierung (siehe V.) führen sofort auf:

$$A^3 = E \Leftrightarrow A \cdot A^2 = E = A \cdot A^{-1},$$

so dass offensichtlich:#

$$A^{-1} = A^2$$

gilt. Die Matrixinverse lautet damit:

$$A^{-1} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1312