Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Eigenwerte, Eigenvektoren

Aufgabe: Gegeben ist die „Drehmatrix“:

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

für reelle Winkel α.

a) Zeige, dass für die inverse Matrix A_α^{-1} gilt: $A_\alpha^{-1} = A_\alpha^T = A_{-\alpha}$.

b) Bestimme die (reellen, komplexen) Eigenwerte und Eigenvektoren zu A_α (in $\mathbf{R}^2$ bzw. $\mathbf{C}^2$).

Lösung: I. Matrixinversionen betreffen quadratische *n*x*n*-Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n. Falls existent, erfüllt eine zur Matrix A inverse Matrix A^{-1} die Matrizengleichung (mit Matrizenmultiplikation):

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

mit der Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) als Ergebnis.

Allgemein lässt sich eine Matrixinversion mit Hilfe des sog. Gaußschen Algorithmus durchführen; es ergibt sich folgende Vorgehensweise:

1) Das Anfangstableau für den Gauß-Algorithmus ist von der Form:

$$A \mid E$$

d.h.:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & 1 & 0 & ... & 0 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & & & & ... & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & 0 & 0 & ... & 1 \end{array}$$

2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter und über der Hauptdiagonalen der Matrix A der linken Seite des Tableaus wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit

b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend in Zeile 1 und mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 1 bzw. Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau der Matrix A. Dieselben Umformungen (1. Schritt usw.) werden – parallel zu den Umformungen der Matrix A – auf der rechten Seite des Tableaus für die Einheitsmatrix E durchgeführt. Es entsteht insgesamt ein Tableau, das die folgenden zwei Fälle impliziert:

Fall I – Invertierbarkeit: 3/I) Ist in diesem Tableau im Bereich der linken Seite die Diagonalgestalt mit den Hauptdiagonalelementen a, b, … gegeben, so folgt die Invertierbarkeit der Matrix A. Die inverse Matrix A^{-1} folgt aus der Division der 1. Zeile des Tableaus durch a, der 2. Zeile durch b usw. Die linke Seite des dadurch erhaltenen Endtableaus ist die Einheitsmatrix E, die rechte stellt die inverse Matrix A^{-1} dar:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & ... & 0 & a_{11}^* & a_{12}^* & ... & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & ... & 0 & a_{21}^* & a_{22}^* & ... & a_{2n}^* \\ ... & & & & ... & & & \\ 0 & 0 & ... & 1 & a_{n1}^* & a_{n2}^* & ... & a_{nn}^* \end{array}$$

d.h.:

$$E \mid A^{-1}$$

Fall II – keine Invertierbarkeit: 3/II) Das (End-) Tableau enthält im Bereich der linken Seite Nullzeilen. Eine inverse Matrix kann daher nicht ermittelt werden und existiert nicht.

II. Für eine quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die <u>charakteristische Matrix</u> für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das <u>charakteristische Polynom</u>. Die Gleichung:

$$\det(A-\lambda E) = 0 \quad (*)$$

heißt <u>charakteristische Gleichung</u> und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen <u>Eigenwerte</u>. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0} \Leftrightarrow A\overset{->}{x} = \lambda \overset{->}{x} \quad (**)$$

für <u>Eigenvektoren</u> $\overset{->}{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt <u>Spektrum</u> σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt <u>Spektralradius</u> ρ(A).
d) Die <u>Spur</u> der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit $A = A^T$ („A transponiert“) hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\overset{->}{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

III. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

n=2: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & & \dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\dots a_{2n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{32}\dots a_{3n} \\ \dots \\ a_{n1}\dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \dots\ a_{3n} \\ \dots \\ a_{n-11}\dots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

IV. Wir bilden die Inverse der Matrix $A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ gemäß dem folgenden Gauß-Schema und unter Verwendung der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ für alle reellen x:

A_α		E		
cos(α)	-sin(α)	1	0	
sin(α)	cos(α)	0	1	cos(α)*(2) – sin(α)*(1)
cos(α)	-sin(α)	1	0	
0	$\cos^2(m\alpha)+\sin^2(m\alpha)$	-sin(α)	cos(α)	
cos(α)	-sin(α)	1	0	(1) + sin(α)*(2)
0	1	-sin(α)	cos(α)	
cos(α)	0	$1 - \sin^2(\alpha)$	sin(α)·cos(α)	
0	1	-sin(α)	cos(α)	
cos(α)	0	$\cos^2(\alpha)$	sin(α)·cos(α)	: cos(α)
0	1	-sin(α)	cos(α)	
1	0	cos(α)	sin(α)	
0	1	-sin(α)	cos(α)	
E		A_α^{-1}		

Die inverse Matrix lautet: $A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Nun ist offensichtlich:

$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = A_\alpha^T$

und wegen sin(-x) = -sin(x) und cos(-x) = cos(x) für alle reellen x:

$A_\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ -(-\sin(-\alpha)) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = A_{-\alpha}$.

V. Wir bestimmen zunächst die Lösungen der charakteristischen Gleichung:
$\det(A_\alpha - \lambda E) = 0$
mit:

$$A_\alpha - \lambda E = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha - \lambda & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

als:
$\det(A_\alpha - \lambda E) = (\cos(\alpha)-\lambda)^2 + \sin^2(\alpha) = \cos^2(\alpha) - 2\lambda\cos(\alpha) + \lambda^2 + \sin^2(\alpha) = \lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1 = 0$
(Determinantenentwicklung für 2x2-Matrizen). Die Gleichung lässt sich wie folgt nach λ umstellen:
$\lambda^2 - 2\lambda\cos(\alpha) + 1 = 0$ (abc-Formel)

$$\lambda_{1,2} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{(2\cos\alpha)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2} = \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{\cos^2\alpha - 1}}{2} =$$

$$\cos\alpha \pm \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \underset{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}{=} \cos\alpha \pm \sqrt{-\sin^2\alpha} = \cos\alpha \pm \sin\alpha\sqrt{-1} = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$$

(mit komplex-imaginärer Einheit i). $\lambda = \cos\alpha \pm i\sin\alpha$ sind Lösungen der charakteristischen Gleichung und damit Eigenwerte der Matrix A_α. Für α als Vielfache von π liegen die reellen Eigenwerte $\lambda = \cos(\alpha) = \pm 1$ vor, ansonsten sind die Eigenwerte komplex.

VI. Wir bestimmen zu den gefundenen Eigenwerten die (reellen, komplexen) Eigenvektoren wie folgt unter der Voraussetzung, dass $\sin(\alpha) \neq 0$ ist:

$\lambda = \cos(\alpha) - i\sin(\alpha)$: $A - (\cos(\alpha) - i\sin(\alpha))E = \begin{pmatrix} i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & i\sin\alpha \end{pmatrix}$ => $\sin\alpha \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit:

Lineares Gleichungssystem (bei $\sin(\alpha) \neq 0$):

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 1 & i & 0 \end{array}\right) \quad i\cdot(2) - (1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungen:
$x_2 = t$
$x_1 = t/i = -it$.

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda = \cos\alpha - i\sin\alpha} = t\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, t komplex.

$\lambda = \cos(\alpha) + i\sin(\alpha)$: $A - (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))E = \begin{pmatrix} -i\sin\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & -i\sin\alpha \end{pmatrix}$ => $\sin\alpha \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit:

Lineares Gleichungssystem (bei $\sin(\alpha) \neq 0$):

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 1 & -i & 0 \end{array}\right) \quad i\cdot(2) + (1)$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungen:
$x_2 = t$
$x_1 = t/(-i) = it$.

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda = \cos\alpha + i\sin\alpha} = t\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, t komplex.

VII. Für α als Vielfache von π ist sin(α) = 0, so dass gilt hinsichtlich der Eigenvektoren gilt:

λ = cos(α) = -1 (α als ungerades Vielfaches von π): A + E = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit:

Lineares Gleichungssystem (bei sin(α) = 0):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungen:

$x_2 = t$
$x_1 = s$.

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=-1} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, s, t reell.

λ = cos(α) = 1 (α als gerades Vielfaches von π): A – E = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ => $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ mit:

Lineares Gleichungssystem (bei sin(α) = 0):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösungen:

$x_2 = t$
$x_1 = s$.

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=1} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, s, t reell.

Jeder Vektor in $\mathbf{R}^2$ ist damit Eigenvektor bzgl. A_α mit α als Vielfaches von π, was für eine Drehung um 180° bzw. 360° steht.

www.michael-buhlmann.de / 05.2021 / Aufgabe 1409