

Mathematikaufgaben

> Lineare Algebra

> Matrizeninversion, Matrizengleichungen

Aufgabe: a) Bestimme die inverse Matrix A^{-1} zur Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Löse mit:

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

für einen Vektor \vec{x} das lineare Gleichungssystem:

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

c) Löse mit:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

für die Matrix X die Matrizengleichung:

$$AX = B.$$

Lösung: a) I. Matrixinversionen betreffen quadratische $n \times n$ -Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n. Falls existent, erfüllt eine zur Matrix A inverse Matrix A^{-1} die Matrizengleichung (mit Matrizenmultiplikation):

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

mit der Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) als Ergebnis.

Allgemein lässt sich eine Matrixinversion mit Hilfe des sog. Gaußschen Algorithmus durchführen; es ergibt sich folgende Vorgehensweise:

1) Das Anfangstableau für den Gauß-Algorithmus ist von der Form:

$$A | E$$

d.h.:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter und über der Hauptdiagonalen der Matrix A der linken Seite des Tableaus wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend in Zeile 1 und mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 1 bzw. Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau der Matrix A. Dieselben Umformungen (1. Schritt usw.) werden – parallel zu den Umformungen der Matrix A – auf der rechten Seite des Tableaus für die Einheitsmatrix E durchgeführt. Es entsteht insgesamt ein Tableau, das die folgenden zwei Fälle impliziert:

Fall I – Invertierbarkeit: 3/I) Ist in diesem Tableau im Bereich der linken Seite die Diagonalgestalt mit den Hauptdiagonalelementen a, b, ... gegeben, so folgt die Invertierbarkeit der Matrix A. Die inverse Matrix A^{-1} folgt aus der Division der 1. Zeile des Tableaus durch a, der 2. Zeile durch b usw. Die linke Seite des dadurch erhaltenen Endtableaus ist die Einheitsmatrix E, die rechte stellt die inverse Matrix A^{-1} dar:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nm}^* \end{array}$$

d.h.:

$$E | A^{-1}$$

Fall II – keine Invertierbarkeit: 3/II) Das (End-) Tableau enthält im Bereich der linken Seite Nullzeilen. Eine inverse Matrix kann daher nicht ermittelt werden und existiert nicht.

II. Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor und haben die Umformungen:

Matrix A | Einheitsmatrix E ->

Anfangstableau:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Zeilentausch: (1) <-> (2) /

```
1 0 0 1 0 | 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 1 0 0 0 | 0 0 0 1 0
1 0 0 0 1 | 0 0 0 0 1
```

1. Schritt: $1 \cdot (5) - 1 \cdot (1)$ /

```
1 0 0 1 0 | 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 1 0 0 0 | 0 0 0 1 0
0 0 0 -1 1 | 0 -1 0 0 1
```

2. Schritt: $1 \cdot (4) - 1 \cdot (2)$ /

```
1 0 0 1 0 | 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 0 0 0 -1 | -1 0 0 1 0
0 0 0 -1 1 | 0 -1 0 0 1
```

3. Schritt: (keine Umformung) /

```
1 0 0 1 0 | 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 0 0 0 -1 | -1 0 0 1 0
0 0 0 -1 1 | 0 -1 0 0 1
```

Zeilentausch: (4) <-> (5) /

```
1 0 0 1 0 | 0 1 0 0 0
0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 0 0 -1 1 | 0 -1 0 0 1
0 0 0 0 -1 | -1 0 0 1 0
```

4. Schritt: $1 \cdot (1) + 1 \cdot (4)$ /

```
1 0 0 0 1 | 0 0 0 0 1
0 1 0 0 1 | 1 0 0 0 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 0 0 -1 1 | 0 -1 0 0 1
0 0 0 0 -1 | -1 0 0 1 0
```

5. Schritt: $1 \cdot (1) + 1 \cdot (5) / 1 \cdot (2) + 1 \cdot (5) / 1 \cdot (4) + 1 \cdot (5) /$

```
1 0 0 0 0 | -1 0 0 1 1
0 1 0 0 0 | 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 0 0 -1 0 | -1 -1 0 1 1
0 0 0 0 -1 | -1 0 0 1 0
```

Teilen: (4):(-1) / (5):(-1) /

```
1 0 0 0 0 | -1 0 0 1 1
0 1 0 0 0 | 0 0 0 1 0
0 0 1 0 0 | 0 0 1 0 0
0 0 0 1 0 | 1 1 0 -1 -1
0 0 0 0 1 | 1 0 0 -1 0
```

-> Einheitsmatrix E | Matrix A^{-1}

-> Inverse Matrix existiert.

Es ergibt sich damit als inverse Matrix:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) I. Für Vektoren \vec{x} und \vec{b} stellt:

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A und üblicher Matrixmultiplikation dar. Die Tabellenform des linearen Gleichungssystems ist:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Ist die Anzahl der Gleichungen m gleich der Anzahl der Unbekannten $x_i, i=1, \dots, n$, so liegt eine quadratische Koeffizientenmatrix A vor. Ist die Koeffizientenmatrix A zudem invertierbar, existiert also die inverse Matrix A^{-1} (siehe a)), so lässt sich der Lösungsvektor \vec{x} bestimmen als:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$$

Die Eindeutigkeit der Lösung \vec{x} ist dann erfüllt.

II. Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{b}$ lautet in Tabellenform:

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}$$

Mit der inversen Matrix A^{-1} ergibt sich die Lösung:

Lösung des linearen Gleichungssystems:

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Die Lösungen im \vec{x} -Vektor lauten mithin: $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = -3, x_4 = -6, x_5 = 2$.

c) I. Matrizengleichungen sind u.a. vom Typ $AX = B$ mit quadratischer invertierbarer Matrix A. Multiplikation mit A^{-1} von links ergibt die Lösungsmatrix X wie folgt:

$$\begin{array}{l} AX = B \\ A^{-1}AX = A^{-1}B \\ EX = A^{-1}B \\ X = A^{-1}B. \end{array} \quad | \cdot A^{-1} \text{ (von links)}$$

II. Wir erhalten somit als Lösungsmatrix X der Matrixgleichung $AX = B$:

Lösung der Matrixgleichung:

$$\begin{aligned}
 X = A^{-1} \cdot B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1284