Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Matrizeninversion

Aufgabe: Bestimme für die Matrix:

$$A_m = r\begin{pmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix}$$, α, r als reelle Zahlen, m als natürliche Zahl

a) die Determinante det(A_m),
b) die Matrixinverse A_m^{-1}.

Lösung: a) I. Determinanten von reell besetzten quadratischen *nxn*-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

n=2: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

n=3: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$$

(Sarrusregel)

n>3: $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{i+1}a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \ldots\ a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n-11}\ldots a_{n-1n} \end{vmatrix}$$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

II. Für die *2x2*-Matrix $A_m = r\begin{pmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix}$ berechnet sich die Determinante (Fall n=2) als:

$$\det(A_m) = r\cdot\det\begin{pmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} = r\cdot\left(\cos^2(m\alpha) - (-\sin^2(m\alpha))\right) = r\cdot\left(\sin^2(m\alpha) + \cos^2(m\alpha)\right) = r\cdot 1 = r$$

wegen der trigonometrischen Beziehung $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle reellen x.

b) I. Matrixinversionen betreffen quadratische *nxn*-Matrizen von der Form:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl n. Falls existent, erfüllt eine zur Matrix A inverse Matrix A^{-1} die Matrizengleichung (mit Matrizenmultiplikation):

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

mit der Einheitsmatrix:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

(mit den Hauptdiagonalelementen 1 und den sonstigen Komponenten als 0) als Ergebnis.

Allgemein lässt sich eine Matrixinversion mit Hilfe des sog. Gaußschen Algorithmus durchführen; es ergibt sich folgende <u>Vorgehensweise</u>:

1) Das Anfangstableau für den Gauß-Algorithmus ist von der Form:

$$A \mid E$$

d.h.:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}$$

2) Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter und über der Hauptdiagonalen der Matrix A der linken Seite des Tableaus wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend in Zeile 1 und mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 1 bzw. Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch das Endtableau der Matrix A. Dieselben Umformungen (1. Schritt usw.) werden – parallel zu den Umformungen der Matrix A – auf der rechten Seite des Tableaus für die Einheitsmatrix E durchgeführt. Es entsteht insgesamt ein Tableau, das die folgenden zwei Fälle impliziert:

Fall I – Invertierbarkeit: 3/I) Ist in diesem Tableau im Bereich der linken Seite die Diagonalgestalt mit den Hauptdiagonalelementen a, b, … gegeben, so folgt die Invertierbarkeit der Matrix A. Die inverse Matrix A^{-1} folgt aus der Division der 1. Zeile des Tableaus durch a, der 2. Zeile durch b usw. Die linke Seite des dadurch erhaltenen Endtableaus ist die Einheitsmatrix E, die rechte stellt die inverse Matrix A^{-1} dar:

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{11}^* & a_{12}^* & \dots & a_{1n}^* \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{21}^* & a_{22}^* & \dots & a_{2n}^* \\ \dots & & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n1}^* & a_{n2}^* & \dots & a_{nn}^* \end{array}$$

d.h.:

$$E \mid A^{-1}$$

Fall II – keine Invertierbarkeit: 3/II) Das (End-) Tableau enthält im Bereich der linken Seite Nullzeilen. Eine inverse Matrix kann daher nicht ermittelt werden und existiert nicht.

II. Wir bilden die Inverse der Matrix $A_m = r\begin{pmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos m\alpha & -r\sin m\alpha \\ r\sin m\alpha & r\cos m\alpha \end{pmatrix}$ gemäß dem folgenden Gauß-Schema und unter Verwendung der Identität $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ für alle reellen x:

A_m		E		
r·cos(mα) r·sin(mα)	-r·sin(mα) r·cos(mα)	1 0	0 1	 cos(mα)*(2) – sin(mα)*(1)
r·cos(mα) 0	-r·sin(mα) $r\cdot\cos^2(m\alpha)+r\cdot\sin^2(m\alpha)$	1 -sin(mα)	0 cos(mα)	
r·cos(mα) 0	-r·sin(mα) r	1 -sin(mα)	0 cos(mα)	(1) + sin(mα)*(2)
r·cos(mα) 0	0 r	$1 - \sin^2(m\alpha)$ -sin(mα)	sin(mα)·cos(mα) cos(mα)	
r·cos(mα) 0	0 r	$\cos^2(m\alpha)$ -sin(mα)	sin(mα)·cos(mα) cos(mα)	: cos(mα)
r 0	0 r	cos(mα) -sin(mα)	sin(mα) cos(mα)	: r : r
1 0	0 1	cos(mα)/r -sin(mα)/r	sin(mα)/r cos(mα)/r	: r : r
E		A_m^{-1}		

Die inverse Matrix lautet: $A_m^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\cos m\alpha & \frac{1}{r}\sin m\alpha \\ -\frac{1}{r}\sin m\alpha & \frac{1}{r}\cos m\alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \cos m\alpha & \sin m\alpha \\ -\sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix}$.

III. Wir führen noch die Probe durch und haben in der Tat:

$$A_m \cdot A_m^{-1} = r\begin{pmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{r}\begin{pmatrix} \cos m\alpha & \sin m\alpha \\ -\sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos m\alpha & -\sin m\alpha \\ \sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos m\alpha & \sin m\alpha \\ -\sin m\alpha & \cos m\alpha \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2(m\alpha) + \sin^2(m\alpha) & \sin m\alpha \cdot \cos m\alpha - \sin m\alpha \cdot \cos m\alpha \\ \sin m\alpha \cdot \cos m\alpha - \sin m\alpha \cdot \cos m\alpha & \sin^2(m\alpha) + \cos^2(m\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

u.a. auf Grund von: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für alle reellen x.

www.michael-buhlmann.de / 02.2021 / Aufgabe 1294