Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Lineare Algebra
> Matrizen

Aufgabe: Bestimme zur Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) den Rang rg(A) und die Determinante det(A) der Matrix A;

b) die Matrizen A^{10} und A^n, $n\varepsilon\mathbf{N}$;

c) die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A;

d) die Hauptachsentransformation zur Matrix A mit Transformationsmatrix S und Diagonalmatrix D.

Lösung: a) I. Zur Bestimmung des <u>Rangs</u> einer (hier) n×n-Matrix A wird diese Matrix in eine Matrix in Dreiecksgestalt umgeformt, was mit Hilfe des Gauß-Verfahrens erfolgen kann.

Gegeben ist die Matrix A mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & & & \\ a_{nn} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch die Dreiecksgestalt einer Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & ... & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & ... & a_{2n}^* \\ ... & & ... & \\ 0 & 0 & ... & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

In der Dreiecksform A* können Nullzeilen auftreten, der Rang rg(A) der Matrix A ist der Rang rg(A*) der Matrix A*, also: rg(A) = rg(A*), der Rang rg(A*) der Dreiecksmatrix A* ist die Anzahl der Matrixzeilen, die keine Nullzeilen sind.

II. Wir gehen nach dem Gaußschen Algorithmus vor und haben die Umformungen:

Matrixrang:

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\mathrm{rg}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Der Matrixrang ist damit: rg(A) = 2.

III. Auch bei der Berechnung der Determinante der n×n-Matrix A lässt sich diese Matrix in eine Matrix in Dreiecksgestalt umformen, was mit Hilfe des Gauß-Verfahrens erfolgen kann.

Gegeben ist die Matrix A mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{nn} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Beim Gaußschen Algorithmus werden, beginnend vom Anfangstableau, Nullen unter der Hauptdiagonalen wie folgt erzeugt: 1. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 1. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 2; ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 2, so werden alle Matrixelemente in Zeile 2 mit a multipliziert, alle Matrixelemente in Zeile 1 mit b multipliziert und Produkt minus Produkt als neue Matrixelemente der Zeile 2 gebildet (Vorgehensweise (*), auch unter Beachtung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Zahlen a und b). Ist a das erste Element in Zeile 1 und b das erste Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*) usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 2. Schritt: Erzeugen von Nullen in der 2. Spalte, beginnend mit der Gleichung in Zeile 3; ist a das zweite Element in Zeile 2 und b das zweite Element in Zeile 3, so gilt die analoge Vorgehensweise (*), und dies weiter für Zeile 4 usw., bis die letzte Matrixzeile erreicht ist. / 3. Schritt usw., bis die letzte Matrixspalte erreicht ist. Es entsteht dadurch die Dreiecksgestalt einer Matrix:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \ldots & a_{1n}^* \\ 0 & a_{22}^* & \ldots & a_{2n}^* \\ \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^* \end{pmatrix}.$$

Addiert man dabei Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile, ändert sich der Wert der Determinante nicht; er ändert sich vom Vorzeichen, wenn Zeilen vertauscht werden, er ändert sich um ein Vielfaches r, wenn eine Zeile mit r multipliziert wird. Damit gilt:

$$\det(A) = (-1)^v \cdot \frac{1}{r_2 \ldots r_n} \cdot \det(A^*)$$

mit v als Anzahl der Zeilenvertauschungen und $r_2, \ldots r_n$ als Faktoren (auch 1), mit denen Zeilen multipliziert wurden. Die beschriebene Vorgehensweise garantiert das Rechnen mit ganzen Zahlen, wenn die Matrix A nur ganzzahlige Komponenten besitzt.
Enthält die Dreiecksmatrix A* Nullzeilen, so verschwindet ihre Determinante mit det(A*) = det(A) = 0. D.h. also für die *n*x*n*-Matrix A:

$$\mathrm{rg}(A) < n \Rightarrow \det(A) = 0.$$

IV. Nach dem unter II. und III. Gesagten gilt hinsichtlich der quadratischen Matrix A mit Zeilen- und Spaltenzahl 4:

rg(A) = 2 < 4 => det(A) = 0.

Die Determinante der Matrix A verschwindet also: det(A) = 0.

b) I. Die Matrixmultiplikation von zwei *mxn*- bzw. *nxp*-Matrizen A und B mit:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix}$$

folgt dem Schema:

$$A\cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2p} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{1i}b_{ip} \\ \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{2i}b_{ip} \\ ... & ... & ... & ... \\ \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i1} & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{i2} & ... & \sum_{i=1}^{n} a_{mi}b_{ip} \end{pmatrix}$$

mit A·B als *mxp*-Matrix.

II. Damit gilt hinsichtlich der Matrixpotenzen von A:

Matrixpotenzierung:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^4 = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & -8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A^5 = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 0 & 0 \\ 16 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 16 & -16 \\ 0 & 0 & -16 & 16 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = \begin{bmatrix} 32 & 32 & 0 & 0 \\ 32 & 32 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 32 & -32 \\ 0 & 0 & -32 & 32 \end{bmatrix}$$

$$A^7 = \begin{bmatrix} 64 & 64 & 0 & 0 \\ 64 & 64 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 64 & -64 \\ 0 & 0 & -64 & 64 \end{bmatrix}$$

$$A^8 = \begin{bmatrix} 128 & 128 & 0 & 0 \\ 128 & 128 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 128 & -128 \\ 0 & 0 & -128 & 128 \end{bmatrix}$$

$$A^9 = \begin{bmatrix} 256 & 256 & 0 & 0 \\ 256 & 256 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 256 & -256 \\ 0 & 0 & -256 & 256 \end{bmatrix}$$

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 512 & 512 & 0 & 0 \\ 512 & 512 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 512 & -512 \\ 0 & 0 & -512 & 512 \end{bmatrix}$$

Es ist also: $A^{10} = 2^9 \cdot A$, woraus – wie leicht zu sehen ist – folgt:

$$A^n = 2^{n-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

bei $n \varepsilon \mathbf{N}$.

c) I. <u>Determinanten</u> von reell besetzten quadratischen n×n-Matrizen A sind reelle Zahlen det(A) = |A| von der (rekursiv definierten) Form:

<u>n=2</u>: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & {}_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

n=3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = \begin{cases} +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{cases}$

(Sarrusregel)

n>3: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & & \ldots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22}\ldots a_{2n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{i+1} a_{i1}\begin{vmatrix} a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{32}\ldots a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{n1}\begin{vmatrix} a_{12}\ \ldots\ a_{1n} \\ a_{32}\ \ldots\ a_{3n} \\ \ldots \\ a_{n-11}\ldots a_{n-1n} \end{vmatrix}$

(Entwicklungssatz von Laplace für Determinanten).

II. I. Für eine reelle quadratische n×n-Matrix A und die n×n-Einheitsmatrix E heißt A–λE die charakteristische Matrix für reelle (komplexe) λ, det(A–λE) die Determinante der charakteristischen Matrix, das charakteristische Polynom. Die Gleichung:

det(A–λE) = 0 (*)

heißt charakteristische Gleichung und hat reelle (komplexe) λ als Lösungen; die Lösungen λ heißen Eigenwerte. Für Eigenwert λ ist dann das folgende lineare Gleichungssystem der charakteristischen Matrix erfüllt:

$$(A-\lambda E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0} \Leftrightarrow A\overset{->}{x} = \lambda \overset{->}{x} \quad (**)$$

für Eigenvektoren $\overset{->}{x}$, die unter der Matrix A als Abbildung um das λ-Fache gestreckt werden. Die Beziehungen (*) und (**) werden zur Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren verwendet.

Es gilt noch:

a) Hat die Matrix A Diagonalgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
b) Hat die Matrix A Dreiecksgestalt, so sind ihre Eigenwerte die Diagonalelemente.
c) Die Menge aller (komplexen) Eigenwerte der Matrix A heißt Spektrum σ(A). Der maximale Betrag eines Eigenwertes aus der Menge der Eigenwerte heißt Spektralradius ρ(A).
d) Die Spur der Matrix A Sp(A) ist die Summe ihrer Eigenwerte.
e) Die Determinante der Matrix A ist das Produkt ihrer (komplexen) Eigenwerte.
f) Eine symmetrische Matrix A mit A = A^T („A transponiert") hat nur reelle Eigenwerte.
g) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind voneinander linear unabhängig.
h) Tritt ein Eigenwert der Matrix A mit Vielfachheit k (1≤k≤n) auf, so gehören zu ihm höchstens k linear unabhängige Eigenvektoren.
i) Bei einer symmetrischen Matrix A stehen die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten jeweils senkrecht aufeinander.

Die charakteristische Gleichung ist vom Typ:

$$\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 = 0 \quad (***).$$

Die Polynomgleichung (***) ist – vom Grad des charakteristischen Polynoms abhängig – immer lösbar für Polynome vom Grad ≤ 4, ansonsten theoretisch unterteilbar in Linear- und (irreduzible) quadratische Faktoren (bei reellen Zahlen) bzw. in Linearfaktoren (bei komplexen Zahlen; Fundamentalsatz der Algebra). Die Summe der Vielfachheiten aller Nullstellen ergibt (im komplexen Fall) den Grad des charakteristischen Polynoms.

Ist λ ein Eigenwert der Matrix A, so heißt ein Vektor $\overset{->}{x}$, der die Gleichung (**) erfüllt, Eigenvektor zum Eigenwert λ. Eigenvektoren ergeben sich als Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems (**): $(A-\lambda E)\cdot \overset{->}{x} = \overset{->}{0}$, das unendliche viele Lösungen (mit einem oder mehreren Parametern) besitzt. Die Menge aller Vektoren, die die Gleichung (**) erfüllen, ergeben den Eigenraum Eig(A, λ) zum Eigenwert λ. Der Eigenraum kann ein- bis mehrdimensional sein.

III. Um die charakteristische Gleichung det(A–λE) = 0 zu ermitteln, gehen wir nach dem Entwicklungssatz für Determinanten vor und entwickeln nach der 1. Spalte:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\det(A-\lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+1}(1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + (-1)^{2+1}\cdot 1\cdot 1\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$(1-\lambda)\cdot \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left((1-\lambda)^3 - (1-\lambda)\right) - \left((1-\lambda)^2 - 1\right) =$$

$$(1-\lambda)^4 - (1-\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 + 1 = (1-\lambda)^4 - 2(1-\lambda)^2 + 1.$$

Die charakteristische Gleichung lautet:

$(1-\lambda)^4 – 2(1-\lambda)^2 + 1 = 0$,

so dass die folgenden Umformungen greifen:

$(1-\lambda)^4 – 2(1-\lambda)^2 + 1 = 0$	(Substitution: $z = (1-\lambda)^2$)
$z^2 – 2z + 1 = 0$	(abc-Formel)
$z = 1$	(Rücksubstitution: $(1-\lambda)^2 = z$)
$(1-\lambda)^2 = 1$	$\mid \sqrt{}$
$1-\lambda = \pm 1$	$\mid -1$
$-\lambda = -1\pm 1$	$\mid \cdot(-1)$
$\lambda = 1\pm 1$	
$\lambda = 0$, $\lambda = 2$.	

<u>Eigenwerte</u> der Matrix A sind damit: λ = 0, λ = 2 mit der jeweiligen Vielfachheit 2.

IV. Zur Bestimmung der <u>Eigenvektoren</u> zu den gefundenen Eigenwerten berechnen wir die Lösungen der Gleichung $A\vec{x} = \lambda \vec{x}$. Wir haben mit dem Gauß-Verfahren:

<u>λ = 0</u>: $(A + 0\cdot E)\cdot \vec{x} = \cdot A \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \vec{0}$ =>

<u>Lineares Gleichungssystem</u>:

$$\begin{array}{rrrrl} +1x_1 & +1x_2 & & & = 0 \\ +1x_1 & +1x_2 & & & = 0 \\ & & +1x_3 & -1x_4 & = 0 \\ & & -1x_3 & +1x_4 & = 0 \end{array}$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
1	1	0	0	0
1	1	0	0	0
0	0	1	-1	0
0	0	-1	1	0

1. Schritt: 1*(*2*) - 1*(*1*) /

1	1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	-1	0
0	0	-1	1	0

2. Schritt: (keine Umformung) /

1	1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	-1	0
0	0	-1	1	0

3. Schritt: 1*(*4*) + 1*(*3*) /

1	1	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	1	-1	0
0	0	0	0	0

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} +\ 1x_1 + 1x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ +\ 1x_3 - 1x_4 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

$x_2 = s$
$x_4 = t$
$x_1 = -s$
$x_3 = t$

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=0} = s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, s, t reell.

λ = 2: $(A+2E)\cdot\vec{x} = \cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\vec{x} = \vec{0}$ =>

Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\ 1x_1 + 1x_2 &= 0 \\ +\ 1x_1 - 1x_2 &= 0 \\ -\ 1x_3 - 1x_4 &= 0 \\ -\ 1x_3 - 1x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Anfangstableau:

x_1	x_2	x_3	x_4	R.S.
-1	1	0	0	0
1	-1	0	0	0
0	0	-1	-1	0
0	0	-1	-1	0

1. Schritt: 1*(*2*) + 1*(*1*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

2. Schritt: (keine Umformung) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}$$

3. Schritt: -1*(*4*) + 1*(*3*) /

$$\begin{array}{rrrr|r} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcl} -1x_1 + 1x_2 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -1x_3 - 1x_4 & = & 0 \\ 0 & = & 0 \end{array}$$

Lösungen des linearen Gleichungssystems:

x_2 = s
x_4 = t
x_1 = s
x_3 = -t

=> Eigenvektoren $\vec{x}_{\lambda=2} = s\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$, s, t reell.

d) I. Eine reelle quadratische n×n-Matrix A ist diagonalisierbar, wenn es eine reelle n×n-Matrix S als Transformationsmatrix gibt mit $S^{-1} = S^T$ (Übereinstimmung von transponierter und inverser Matrix), so dass

$$D = S^{-1}AS$$

gilt, wobei D eine Diagonalmatrix ist, die in der Hauptdiagonale die Eigenwerte der Matrix A enthält. Die Diagonalisierbarkeit von A ist gegeben, wenn z.B. das charakteristische Polynom det(A–λE) in paarweise verschiedene Linearfaktoren zerfällt oder Eigenvektoren von A eine Basis des n-dimensionalen reellen Vektorraums $\mathbf{R}^n$ bilden.

II. Wie wir leicht sehen, spannen die vier Eigenvektoren $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ den Vektorraum $\mathbf{R}^4$ auf (Eigenvektoren als Basis) und stehen auch jeweils zueinander senkrecht. Die Matrix A ist damit diagonalisierbar, die Transformationsmatrix S setzt sich aus den normierten Eigenvektoren $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$ (als Orthonormalbasis) zusammen, also:

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit: $S^{-1} = S^T$, S orthogonal. Die Diagonalmatrix D zur Matrix A ist folglich:

$$D = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir machen noch die Probe:

$D = S^{-1}AS =$

$$\frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1456