Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Nullstellen, Extrem-, Wendepunkte

Aufgabe: Die Exponentialfunktion:

$$f(x) = e^{-2x} + 2x - 3$$

ist auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte zu untersuchen.

Lösung: I. a) Nullstellen als Schnittpunkte einer Funktion f(x) mit der x-Achse des x-y-Koordinatensystems errechnen sich vermöge:

$f(x) = 0$ -> $x_1, x_2, \ldots$ -> $N(x_1|0), N(x_2|0), \ldots$

(Gleichungen [und das Lösen von Gleichungen] sind u.a. Polynomgleichungen [lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und a-b-c-Formel, Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, Substitution $z = x^2$ u.ä.], Bruchgleichungen [Multiplikation mit dem Hauptnenner], Potenzgleichungen [Radizieren], Exponentialgleichungen [Logarithmieren], Logarithmengleichungen [Exponieren], trigonometrische Gleichungen [Umstellen nach Sinus oder Kosinus, {unendlich viele} Lösungen entsprechend der Periodizität].)

b) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0$ => $x_1, \ldots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0$ => relatives Minimum/Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f''(x_1) < 0$ => relatives Maximum/Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0$ => $x_1, \ldots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung).

c) Bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Wendepunkte ist folgendermaßen vorzugehen:

$f''(x) = 0$ => $x_1, \ldots$ als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'''(x_1) > 0$ => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f'''(x_1) < 0$ => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f''(x) = 0$ => $x_1, \ldots$ als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1-h)<0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f''(x_1-h)>0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung).

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

II. Wir berechnen die 1., 2. (und 3.) Ableitung der Funktion $f(x) = e^{-2x} + 2x - 3$ (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel für Exponentialfunktionen):

$$f'(x) = -2e^{-2x} + 2$$

$$f''(x) = 4e^{-2x}$$

$$[\, f'''(x) = -8e^{-2x} \,].$$

III. Hoch-, Tiefpunkte: Nullsetzen der 1. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichungsumformungen:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + 2 = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} = -2 \Leftrightarrow e^{-2x} = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0\,,$$

so dass x=0 die Stelle ist, an der die Funktion f(x) eine waagerechte Tangente besitzt. Einsetzen von x=0 in die 2. Ableitung (hinreichende Bedingung) ergibt dann:

$$f''(0) = 4e^{-2\cdot 0} = 4 > 0$$

so dass ein Tiefpunkt vorliegt. Der Funktionswert des Tiefpunkts errechnet sich als:

$$f(0) = e^{-2\cdot 0} + 2\cdot 0 - 3 = 1 - 3 = -2\,.$$

Die Funktion f(x) besitzt damit den Tiefpunkt T(0|-2).

IV. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichung:

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 4e^{-2x} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = 0\,,$$

die keine Lösung besitzt. Die Funktion f(x) verfügt also über keine Wendepunkte.

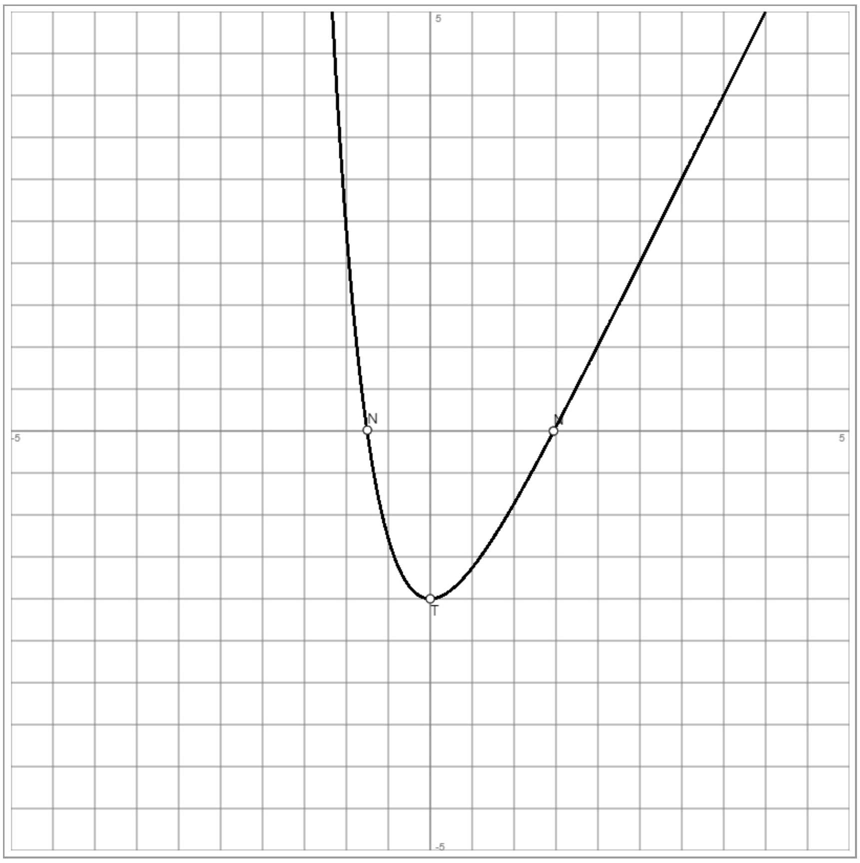
V. Gemäß III. haben wir den Tiefpunkt T(0|-2) als einzigen Extrempunkt der Funktion f(x) erhalten. Der Tiefpunkt liegt im x-y-Koordinatensystem unterhalb der x-Achse. Daher besitzt die Funktion $f(x) = e^{-2x} + 2x - 3$ zwei Nullstellen, etwa wegen: f(-1) = 2,39 > 0 und f(2) =1,08 > 0 (Vorzeichenwechsel und Nullstellen; siehe VI.).

VI. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	22013.4658	-44051.05	88105.98	
-4.5	8091.0839	-16204.21	32412.38	
-4	2969.958	-5959.93	11923.85	
-3.5	1086.6332	-2191.27	4386.54	
-3	394.4288	-804.86	1613.72	
-2.5	140.4132	-294.83	593.65	
-2	47.5982	-107.2	218.39	
-1.5	14.0855	-38.17	80.34	
-1	2.3891	-12.78	29.56	
-0.754	0	-7.04	18.07	Nullstelle N(-0.75|0)
-0.5	-1.2817	-3.44	10.87	
0	-2	0	4	Schnittpunkt S_y(0|-2) = Tiefpunkt T(0|-2)
0.5	-1.6321	1.26	1.47	
1	-0.8647	1.73	0.54	
1.472	0	1.89	0.21	Nullstelle N(1.47|0)
1.5	0.0498	1.9	0.2	
2	1.0183	1.96	0.07	
2.5	2.0067	1.99	0.03	

3	3.0025	2	0.01	
3.5	4.0009	2	0	
4	5.0003	2	0	
4.5	6.0001	2	0	
5	7	2	0	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 02.2024 / Aufgabe 2003