Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Nullstellen, Extrem-, Wendepunkte

Aufgabe: Die Exponentialfunktion:

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - x^2$$

ist auf Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkte zu untersuchen.

Lösung: I. a) Nullstellen als Schnittpunkte einer Funktion f(x) mit der x-Achse des x-y-Koordinatensystems errechnen sich vermöge:

$f(x) = 0$ -> $x_1, x_2, \dots$ -> $N(x_1|0), N(x_2|0), \dots$

(Gleichungen [und das Lösen von Gleichungen] sind u.a. Polynomgleichungen [lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und a-b-c-Formel, Ausklammern und Satz vom Nullprodukt, Substitution $z = x^2$ u.ä.], Bruchgleichungen [Multiplikation mit dem Hauptnenner], Potenzgleichungen [Radizieren], Exponentialgleichungen [Logarithmieren], Logarithmengleichungen [Exponieren], trigonometrische Gleichungen [Umstellen nach Sinus oder Kosinus, {unendlich viele} Lösungen entsprechend der Periodizität].)

b) Allgemein ist bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Hoch- und Tiefpunkte als Extrempunkte (Punkte mit waagerechter Tangente) zu beachten:

$f'(x) = 0$ => $x_1, \dots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1) > 0$ => relatives Minimum/Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f''(x_1) < 0$ => relatives Maximum/Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f'(x) = 0$ => $x_1, \dots$ als Hoch-, Tief- oder Sattelpunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Tiefpunkt $T(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Hochpunkt $H(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)>0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$
$f'(x_1-h)<0$, $f'(x_1)=0$, $f'(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => kein Vorzeichenwechsel => Sattelpunkt $S(x_1|f(x_1))$ (hinreichende Bedingung).

c) Bei der Untersuchung einer differenzierbaren Funktion f(x) auf Wendepunkte ist folgendermaßen vorzugehen:

$f''(x) = 0$ => $x_1, \dots$ als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f'''(x_1) > 0$ => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f'''(x_1) < 0$ => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung)

bzw.:

$f''(x) = 0$ => $x_1, \dots$ als Wendepunkte der Funktion (notwendige Bedingung)

$f''(x_1-h)<0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)>0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von – nach + => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Rechts- zu einer Linkskrümmung
$f''(x_1-h)>0$, $f''(x_1)=0$, $f''(x_1+h)<0$ für ein gewisses positives h nahe 0 => Vorzeichenwechsel der Ableitung von + nach – => Wendepunkt $W(x_1|f(x_1))$ mit Übergang von einer Links- zu einer Rechtskrümmung (hinreichende Bedingung).

Sattelpunkte sind Wendepunkte mit waagerechter Tangente.

II. Wir berechnen die 1., 2. (und 3.) Ableitung der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2$ (Ableiten gemäß Summenregel, Potenzregel und Regel für Exponentialfunktionen):

$f'(x)=e^{2x}-2x$

$f''(x)=2e^{2x}-2$

$f'''(x)=4e^{2x}$.

III. Wendepunkte: Nullsetzen der 2. Ableitung (notwendige Bedingung) führt auf die Gleichung:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2e^{2x}-2=0 \Leftrightarrow 2e^{2x}=2 \Leftrightarrow e^{2x}=1 \Leftrightarrow 2x=\ln(1)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Wegen $f'''(0)=4e^{2\cdot 0}=4 \neq 0$ verfügt die Funktion f(x) also über einen Wendepunkt W(0|0,5) mit:

$f(0)=\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}-0^2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

IV. Hoch-, Tiefpunkte: Die 1. Ableitung $f'(x)=e^{2x}-2x$ ist immer positiv, denn deren Tiefpunkt ist der einzige Wendepunkt W(0|0,5) der Funktion f (x). Also folgt: f'(x) ≥ $f'(0)=e^{2\cdot 0}-2\cdot 0$ = 1 und damit:

f'(x) ≥ 1 => f'(x) > 0

für alle reellen x. Die Funktion f(x) besitzt damit keinen Hoch- und Tiefpunkt, sie ist überall (streng) monoton steigend.

V. Für die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2$ gilt: f(-1) = -0,93 < 0 und f(0) =0,5 > 0 (Vorzeichenwechsel und Nullstellen), so dass im Intervall [-1; 0] eine Nullstelle vorliegt. Diese ist auch die einzige Nullstelle der Funktion wegen der strengen Monotonie von f(x) (siehe IV.).
Die Nullstelle lässt sich genauer, etwa auf zwei Stellen hinter dem Komma ermitteln, wenn wir die Funktion f(x) im Intervall [-1; 0] auswerten und diese Auswertung in einem kleineren Teilintervall wiederholen. Es gilt für das Intervall [-1; 0] bei Schrittweite 0,1:

X	**f(x)**	**Vorzeichenwechsel**
-1	-0.9323	
-0.9	-0.7274	
-0.8	-0.5391	
-0.7	-0.3667	
-0.6	-0.2094	
-0.5	-0.0661	f(-0,5) = -0.0661 < 0
-0.4	0.0647	f(-0.4) = 0.0647 > 0
-0.3	0.1844	
-0.2	0.2952	
-0.1	0.3994	
0	0.5	

und weiter für das Teilintervall [-0,5; -0,4] bei Schrittweite 0,01:

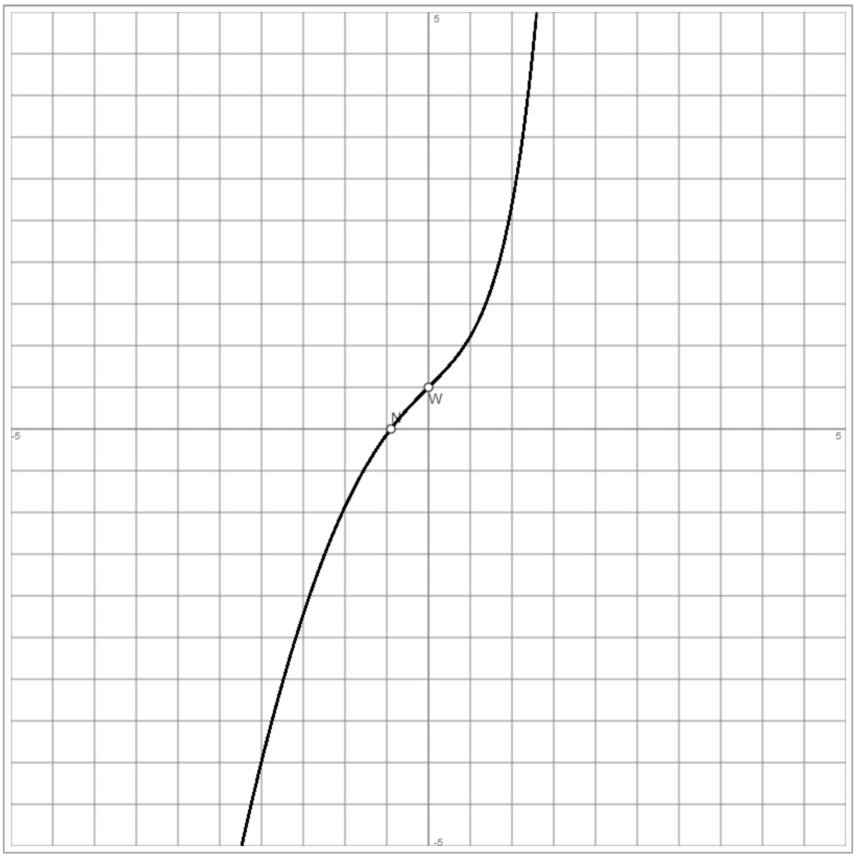
x	f(x)	Vorzeichenwechsel
-0.5	-0.0661	
-0.49	-0.0524	
-0.48	-0.039	
-0.47	-0.0256	
-0.46	-0.0123	f(-0.46) = -0.0123 < 0
-0.45	0.0008	f(-0.45) = 0.0008 > 0
-0.44	0.0138	
-0.43	0.0267	
-0.42	0.0395	
-0.41	0.0521	
-0.4	0.0647	

Die Nullstelle der Funktion $f(x)=\frac{1}{2}e^{2x}-x^2$ ist damit (ungefähr): N(-0,45|0) (siehe VI.).

VI. Wertetabelle, Graph:

Wertetabelle:				
x	**f(x)**	**f'(x)**	**f''(x)**	**Besondere Kurvenpunkte**
-5	-25	10	-2	
-4.5	-20.2499	9	-2	
-4	-15.9998	8	-2	
-3.5	-12.2495	7	-2	
-3	-8.9988	6	-2	
-2.5	-6.2466	5.01	-1.99	
-2	-3.9908	4.02	-1.96	
-1.5	-2.2251	3.05	-1.9	
-1	-0.9323	2.14	-1.73	
-0.5	-0.0661	1.37	-1.26	
-0.452	-0.0018	1.31	-1.19	Nullstelle N(-0.45|0)
-0.002	0.498	1	-0.01	Wendepunkt W(0|0.5)
0	0.5	1	0	Schnittpunkt S_y(0|0.5)
0.5	1.1091	1.72	3.44	
1	2.6945	5.39	12.78	
1.5	7.7928	17.09	38.17	
2	23.2991	50.6	107.2	
2.5	67.9566	143.41	294.83	
3	192.7144	397.43	804.86	
3.5	536.0666	1089.64	2191.27	
4	1474.479	2972.97	5959.92	
4.5	4031.292	8094.11	16204.19	
5	10988.2329	22016.52	44050.99	

Graph:



www.michael-buhlmann.de / 02.2024 / Aufgabe 2004