Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Oberflächenintegrale

Aufgabe: Berechne das Oberflächenintegral:

$$\int_S f(x,y,z)dO$$

für die vorgegebene skalare Funktion f: $\mathbf{R}^3$ -> $\mathbf{R}$ mit $f(x,y,z) = z^2$ und zum vorgegebenen Flächenbereich $S = \{(x,y,z)^T \varepsilon \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2 + z^2 = \frac{1}{4}\}$.

Lösung: I. Beschreibt die Fläche S eine Kugel im x-y-z-Koordinatensystem mit Mittelpunkt M(0|0|0) und Kugelradius r, gilt also: $x^2+y^2 + z^2 = r^2$, so erfolgt der Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten an mit:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

bei: $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le \vartheta \le \pi$. Die Parametrisierung des Flächenbereichs genügt damit der Parameterfunktion:

$$\Phi(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit den bei einer Oberflächenberechnung anfallenden partiellen Ableitungen:

$$\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi) = r\begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix},\ \Phi_\varphi(\vartheta,\varphi) = r\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dem Kreuzprodukt der beiden Ableitungen:

$$\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\times\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi) = r^2\begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = r^2\begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} = r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Wir nennen $\overset{->}{n} = \Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\times\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi) = r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ den Normalenvektor, der auf jedem durch ϑ und φ definierten Punkt der Kugeloberfläche senkrecht zur Kugeloberfläche bzw. der zu Punkt und Kugel gehörenden Tangentialebene steht. Nun ist:

$$\left|\vec{n}\right| = \left| r^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin\vartheta \left| \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \right| = r^2 \sin\vartheta \cdot 1 = r^2 \sin\vartheta$$

und damit das <u>skalare Oberflächenelement</u>:

$$dO = \left|\vec{n}\right| d\vartheta d\varphi = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi .$$

Das <u>Oberflächenintegral</u> (1. Art) wird damit bei ebenfalls zu f*(ϑ,φ) parametrisierter skalarer Funktion f(x,y,z) zu:

$$\int_S f(x,y,z)dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(\vartheta,\varphi) \cdot r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi .$$

II. Die Fläche S beschreibt eine Kugel im x-y-z-Koordinatensystem mit Mittelpunkt M(0|0|0) und Kugelradius r = 0,5. Es bietet sich somit der Übergang von kartesischen zu <u>Kugelkoordinaten</u> an mit:

$$x = 0{,}5 \cdot \sin\vartheta\cos\varphi$$

$$y = 0{,}5 \cdot \sin\vartheta\sin\varphi$$

$$z = 0{,}5 \cdot \cos\vartheta$$

bei: 0≤φ≤2π, 0≤ϑ≤π. Zudem ist für f(x,y,z) = z^2 mit $z = 0{,}5 \cdot \cos\vartheta$:

f*(ϑ,φ) = $0{,}25 \cdot \cos^2\vartheta$.

III. Zur Ermittlung des <u>Oberflächenintegrals</u> $\int_S f(x,y,z)dO$ verwenden wir zu den Kugelkoordinaten das Flächenelement $dO = r^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi = 0{,}25 \cdot \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ und integrieren:

$$\int_S f(x,y,z)dO = \int_{x^2+y^2+z^2=\frac{1}{4}} z^2 dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 0{,}25 \cdot \cos^2\vartheta \cdot 0{,}25 \cdot \sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$0{,}0625 \cdot \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \underset{(*)}{=} 0{,}0625 \cdot \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3} \right]_0^{\pi} d\varphi =$$

$$0{,}0625 \cdot \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos^3\pi}{3} + \frac{\cos^3 0}{3} \right) d\varphi = 0{,}0625 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) d\varphi =$$

$$0{,}0625 \cdot \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} d\varphi = 0{,}0625 \cdot \left[\frac{2}{3}\varphi \right]_0^{2\pi} = 0{,}0625 \cdot \left(\frac{4}{3}\pi - 0 \right) = \frac{\pi}{12}$$

auf Grund von (*):

$$\int \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta \underset{\substack{u=\cos\delta \\ -du=\sin\vartheta}}{=} \int -u^2 du = -\frac{u^3}{3} \underset{u=\cos\vartheta}{=} -\frac{\cos^3\vartheta}{3} .$$

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1469