Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Oberflächenintegrale

Aufgabe: Berechne das (geschlossene) Oberflächenintegral:

$$\oint_S f(x,y,z)dO$$

für das vorgegebene Vektorfeld f: **R**^{3} -> **R**^{3} mit $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ und zum vorgegebenen Flächenbereich der Einheitskugel S = {(x,y,z)^{T}ε**R**^{3} | x^2+y^2 + z^2 = 1}.

1. Lösung: I. Beschreibt die Fläche S eine Kugel im x-y-z-Koordinatensystem mit Mittelpunkt M(0|0|0) und Kugelradius r, gilt also: x^2+y^2 + z^2 = r^2, so erfolgt der Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten an mit:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = r\cos\vartheta$$

bei: 0≤φ≤2π, 0≤ϑ≤π. Die Parametrisierung des Flächenbereichs genügt damit der Parameterfunktion:

$$\Phi(\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix} r\sin\vartheta\cos\varphi \\ r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\cos\vartheta \end{pmatrix}=r\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

mit den bei einer Oberflächenberechnung anfallenden partiellen Ableitungen:

$$\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)=r\begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix},\ \Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)=r\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

und dem Kreuzprodukt der beiden Ableitungen:

$$\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\times\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)=r^2\begin{pmatrix} \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}=r^2\begin{pmatrix} \sin^2\vartheta\cos\varphi \\ \sin^2\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix}=r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Wir nennen $\overset{->}{n}=\Phi_\vartheta(\vartheta,\varphi)\times\Phi_\varphi(\vartheta,\varphi)=r^2\sin\vartheta\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$ den Normalenvektor, der auf jedem durch ϑ und φ definierten Punkt der Kugeloberfläche senkrecht zur Kugeloberfläche bzw. der zu Punkt und Kugel gehörenden Tangentialebene steht. Nun ist das vektorielle Oberflächenelement:

$$dO = \overset{->}{n}\, d\vartheta d\varphi = r^2 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi\,.$$

Das Oberflächenintegral (2. Art) wird damit bei ebenfalls zu $f^*(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} f_1^*(\vartheta,\varphi) \\ f_2^*(\vartheta,\varphi) \\ f_3^*(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix}$ parametrisiertem Vektorfeld $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} f_1(x,y,z) \\ f_2(x,y,z) \\ f_3(x,y,z) \end{pmatrix}$ (mit reellwertigen Teilfunktionen f_1, f_2, f_3, f_1^*, f_2^*, f_3^*) (unter Verwendung des Skalarprodukts) zu:

$$\int_S f(x,y,z)dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f^*(\vartheta,\varphi)\cdot \overset{->}{n}\, d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta \cdot \begin{pmatrix} f_1^*(\vartheta,\varphi) \\ f_2^*(\vartheta,\varphi) \\ f_3^*(\vartheta,\varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi\,.$$

II. Die Fläche S beschreibt die Fläche der Einheitskugel im x-y-z-Koordinatensystem mit Mittelpunkt M(0|0|0) und Kugelradius r = 1. Es bietet sich somit der Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten an mit:

$$x = \sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y = \sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z = \cos\vartheta$$

bei: 0≤φ≤2π, 0≤ϑ≤π. Zudem wird das Vektorfeld $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ z \end{pmatrix}$ parametrisiert zu:

$$f^*(\vartheta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

III. Zur Ermittlung des Oberflächenintegrals $\oint_S f(x,y,z)dO$ gehen wir gemäß I. vor und integrieren:

$$\oint_S f(x,y,z)dO = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} d\vartheta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta \cdot \left(\sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi - \sin^2\vartheta\sin\varphi\cos\varphi + \cos^2\vartheta\right) d\vartheta d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\vartheta\cdot\cos^2\vartheta\cdot d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \cos^2\vartheta \sin\vartheta d\vartheta d\varphi \underset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^3\vartheta}{3}\right]_0^{\pi} d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos^3\pi}{3}+\frac{\cos^3 0}{3}\right)d\varphi=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)d\varphi=$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}d\varphi=\left[\frac{2}{3}\varphi\right]_0^{2\pi}=\frac{4}{3}\pi-0=\frac{4}{3}\pi$$

auf Grund von (*):

$$\int\cos^2\vartheta\sin\vartheta d\vartheta \underset{\substack{u=\cos\delta\\ -du=\sin\vartheta}}{=} \int -u^2du=-\frac{u^3}{3}\underset{u=\cos\vartheta}{=}-\frac{\cos^3\vartheta}{3}.$$

2. Lösung: I. Es gilt unter den Voraussetzungen von Stetigkeit und Differenzierbarkeit und für ein Vektorfeld f: $\mathbf{R}^3$ -> $\mathbf{R}^3$ mit $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} f_1(x,y,z)\\ f_2(x,y,z)\\ f_3(x,y,z)\end{pmatrix}$ (mit reellwertigen Teilfunktionen f_1, f_2, f_3) der

Integralsatz von Gauß:

$$\int_S f(x,y,z)dO=\int_{\delta K} f(x,y,z)dO=\int_K \nabla\cdot f(x,y,z)dV\ ,$$

wenn die Oberfläche S der Rand δK eines geschlossenen Körpers K mit Volumen V ist und die Divergenz

$$divf=\nabla\cdot f(x,y,z)=\frac{\delta f_1(x,y,z)}{\delta x}+\frac{\delta f_2(x,y,z)}{\delta y}+\frac{\delta f_3(x,y,z)}{\delta z}$$

das formale Skalarprodukt von Nabla-Operator $\nabla=\begin{pmatrix}\frac{\delta}{\delta x}\\ \frac{\delta}{\delta y}\\ \frac{\delta}{\delta z}\end{pmatrix}$ und Vektorfeld f(x,y,z) ist.

II. Die in der Aufgabenstellung vorgegebene Oberfläche S = $\{(x,y,z)^T \varepsilon \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ ist der Rand des Kugelkörpers K = $\{(x,y,z)^T \varepsilon \mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$, also: S = δK. Der Integralsatz von Gauß liefert mit der Divergenz div f = 0 + 0 + 1 = 1 bei $f_1(x,y,z) = y$, $f_2(x,y,z) = -x$, $f_3(x,y,z) = z$ und wegen des Vektorfelds $f(x,y,z)=\begin{pmatrix} y\\ -x\\ z\end{pmatrix}$ den Wert des Oberflächenintegrals:

$$\oint_S f(x,y,z)dO=\int_{x^2+y^2+z^2=1} f(x,y,z)d(x,y,z)=\int_K\nabla\cdot f(x,y,z)dV=\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}1\cdot d(x,y,z)=$$

$$\int_{x^2+y^2+z^2\le 1}d(x,y,z)=\frac{4}{3}\pi$$

wegen des Volumens V = $\frac{4}{3}\pi$ der Einheitskugel K mit Radius r = 1.

III. Der Wert des Oberflächenintegrals lässt sich auch ermitteln durch den Übergang von kartesischen zu Kugelkoordinaten mit:

$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$

$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$

$z = r \cos \vartheta$

bei: 0≤r≤1, 0≤φ≤2π, 0≤ϑ≤π und dem Volumenintegral:

$$\int\limits_{x^2+y^2+z^2\leq 1} d(x,y,z) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin \vartheta \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\vartheta d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin \vartheta \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) d\vartheta d\varphi =$$

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left[-\cos \vartheta\right]_0^{\pi} d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} \left(-\cos \pi + \cos 0\right) d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} 2 d\varphi = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi} d\varphi =$$

$$\frac{2}{3} \cdot [\varphi]_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \cdot (2\pi - 0) = \frac{4}{3}\pi.$$

www.michael-buhlmann.de / 07.2021 / Aufgabe 1470