

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Parabeln

Aufgabe: a) Verschiebe die Normalparabel $p_1: y = x^2 - 4x + 1$ im x-y-Koordinatensystem um 2 Längeneinheiten nach links und 5 Längeneinheiten nach oben. Wie lautet die Gleichung der durch die Verschiebung entstandenen Normalparabel p_2 ?

b) Wie lautet die Gerade durch die Scheitelpunkte der beiden Parabeln p_1 und p_2 ?

c) Wo schneiden sich die beiden Parabeln p_1 und p_2 ?

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer nach oben geöffneten Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(d|c)$ ist ein (Funktions-) Term von der (Scheitel-) Form $y = (x-d)^2 + c$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Ausrechnen der Scheitelform unter Benutzung der binomischen Formeln führt auf die Normalform vom Typ $y = x^2 + px + q$. Quadratische Ergänzung mittels:

$$y = x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

führt umgekehrt wieder auf die Scheitelform der Normalparabel mit Scheitelpunkt $S(d|c) =$

$S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)$ (Letzteres ist auch eine Formel zur direkten Bestimmung des Scheitelpunktes einer Normalparabel).

Verschiebungen von Normalparabeln im x-y-Koordinatensystem um a Längeneinheiten nach rechts bzw. links ($a > 0$ bzw. $a < 0$) führen auf die Funktionsgleichung:

$$y = (x - a)^2 + p(x - a) + q = \left(x + \frac{p}{2} - a\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

um b Längeneinheiten nach oben bzw. unten ($b > 0$ bzw. $b < 0$) auf:

$$y = x^2 + px + q + b = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + b.$$

II. Der Scheitelpunkt der Parabel $p_1: y = x^2 - 4x + 1$ errechnet sich mit:

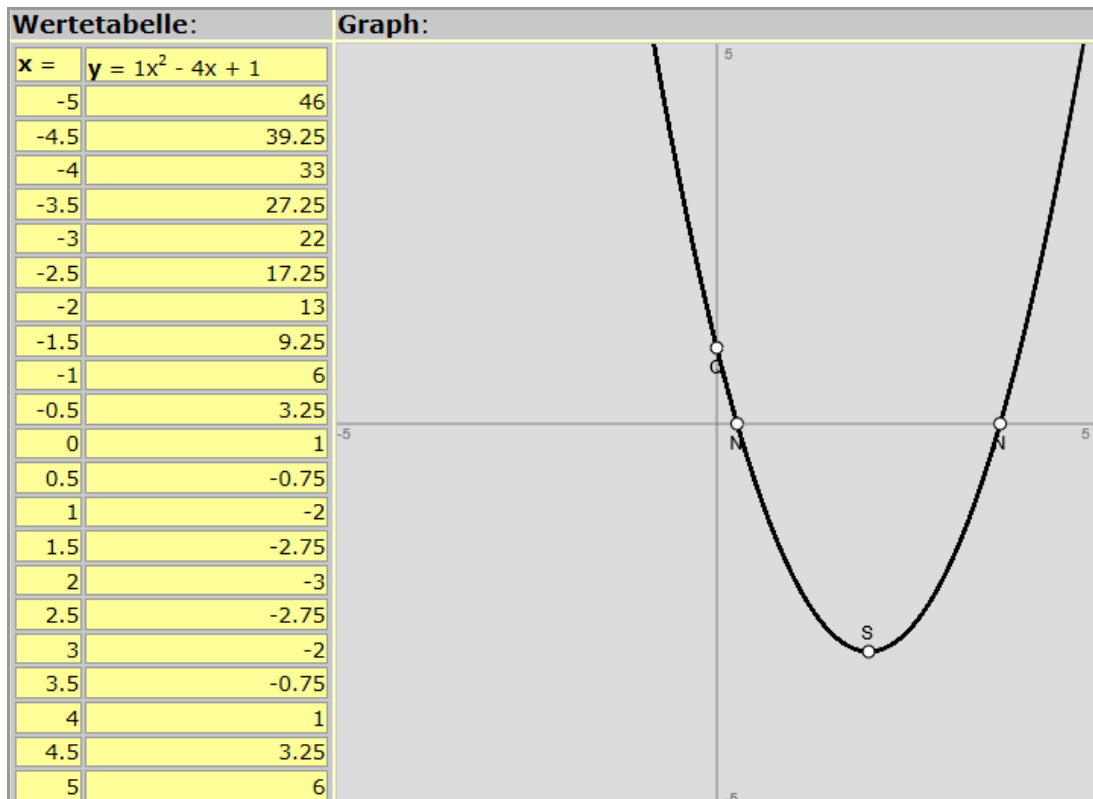
$$x_s = -\frac{p}{2} = -\frac{-4}{2} = 2 \quad (p = -4)$$

$$y_s = 2^2 - 4 \cdot 2 + 1 = -3$$

als: $S_1(2|-3)$, so dass sich als Scheitelform der Normalparabel ergibt:

$$p_1: y = (x - 2)^2 - 3.$$

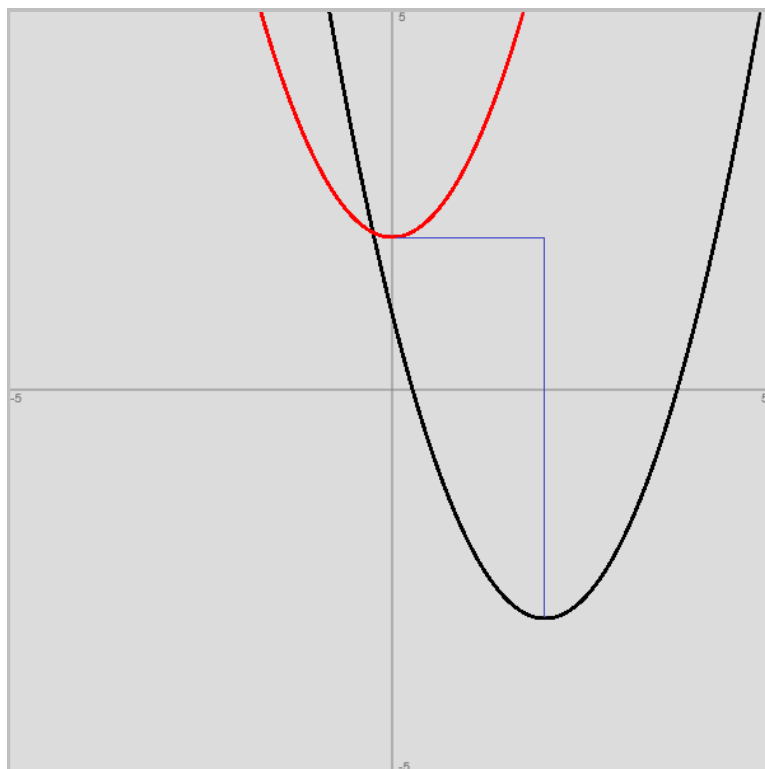
III. Wertetabelle und Graph der Parabel $p_1: y = x^2 - 4x + 1$ sind:



IV. Die Verschiebung der Parabel $p_1: y = (x - 2)^2 - 3$ um 2 Längeneinheiten (LE) nach links und 5 Längeneinheiten nach oben zur Parabel p_2 erfolgt über den Scheitelpunkt $S_1(2|-3)$, der zum Scheitelpunkt $S_2(2-2|-3+5) = S_2(0|2)$ wird (x-Koordinate: 2 LE nach links \rightarrow -2; y-Koordinate: 5 LE nach oben \rightarrow +5). Die verschobene Normalparabel lautet somit in der Scheitelform:

$$p_2: y = (x - 0)^2 + 2 = x^2 + 2,$$

die gleichzeitig auch die Normalform der Parabel p_2 ist.



b) I. Die Funktionsvorschrift einer allgemeinen Geraden ist ein (Funktions-) Term von der Form $y = mx + b$ mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y (Geradengleichung). Sind hinsichtlich einer Geradenbestimmung zwei Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ gegeben, so ist die

folgenden Vorgehensweise möglich: Der Berechnung der Steigung mit dem Differenzenquotienten $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ der Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ folgt das Einsetzen etwa des Punktes P in die Geradengleichung $y = mx + b$, um b als $b = y_1 - mx_1$ zu bestimmen.

II. Mit $S_1(2|-3)$ und $S_2(0|2)$ ergibt sich für die Gerade $y = mx + b$ durch die beiden Scheitelpunkte:

$$S_1(2|-3), S_2(0|2) \Rightarrow m = \frac{2 - (-3)}{0 - 2} = \frac{5}{-2} = -2,5 \Rightarrow y = -2,5x + b$$

$$S_2(0|2) \Rightarrow 2 = -2,5 \cdot 0 + b = b \Rightarrow y = -2,5x + 2.$$

Die gesuchte Gerade lautet damit: $y = -2,5x + 2$.

c) I. Den Schnittpunkt zwischen zwei Normalparabeln bestimmen sich durch Gleichsetzen der Parabelterme $p_1: y = x^2 + p_1x + q_1$ und $p_2: y = x^2 + p_2x + q_2$ als:

$$\begin{array}{l|l} x^2 + p_1x + q_1 = x^2 + p_2x + q_2 & | -x^2 \\ p_1x + q_1 = p_2x + q_2 & | -p_2x, -q_1 \\ (p_1 - p_2)x = q_2 - q_1 & | (p_1 - p_2) \\ x = (q_2 - q_1) / (p_1 - p_2) & (p_1 \neq p_2) \end{array}$$

Einsetzen des errechneten x -Wertes in eine der beiden Parabelgleichungen führt auf die y -Koordinate des Schnittpunktes und damit auf den Schnittpunkt $P(x_0|y_0)$.

II. Wir setzen zur Bestimmung des Schnittpunktes die Parabelterme $p_1: y = x^2 - 4x + 1$ und $p_2: y = x^2 + 2$ gleich. Also:

$$\begin{array}{l|l} x^2 - 4x + 1 = x^2 + 2 & | -x^2 \\ -4x + 1 = 2 & | -1 \\ -4x = 1 & | :(-4) \\ x = -0,25 & \end{array}$$

mit: $y = (-0,25)^2 + 2 = 2,0625$. Der Schnittpunkt lautet: $P(-0,25|2,0625)$.

