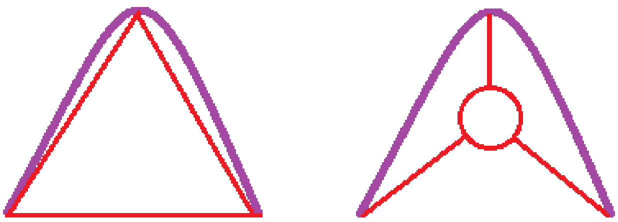
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabelmodellierung

Aufgabe: Ein Schmuckstück besteht aus einem symmetrischen Parabelstück, das eine Breite von 24 mm und eine Höhe von 18 mm aufweist. Das Parabelstück besteht aus Gold. Das Schmuckstück wird in zwei Varianten hergestellt. Bei der Variante D ist in das Parabelstück ein Dreieck aus Platindraht zwischen den Parabelenden und dem Parabelscheitelpunkt eingearbeitet. Bei der Variante K ist ein Kreis aus Platindraht mit den Parabelenden und dem Parabelscheitelpunkt durch weitere Platindrähte verbunden; der Kreismittelpunkt befindet sich auf halber Höhe unterhalb des Parabelscheitels, der Kreisdurchmesser beläuft sich auf 8 mm. Der Schmuckdesigner hat zu den Varianten folgende Skizzen angefertigt:



Variante D | Variante K

a) Bestimme eine Parabelgleichung, die das Parabelstück beschreibt.

b) Für welche der zwei Varianten D und K wird weniger Platindraht benötigt?

Lösung: a) I. Allgemein gilt: Die Funktionsvorschrift einer <u>allgemeinen Parabel</u> mit Scheitelpunkt S(0|c) auf der y-Achse ist ein (Funktions-) Term von der (Scheitel-, Normal-) Form $y = ax^2 + c$ ($a \neq 0$) mit der unabhängigen Variablen x und der abhängigen Variablen y als Parabelgleichung. Ist a>0, so ist die Parabel nach oben geöffnet, bei a<0 nach unten. Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse (Nullstellen) folgen, falls existent, aus:

$$y = 0 \Leftrightarrow ax^2+c = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -c \Leftrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

mit: $N_1(-\sqrt{-\frac{c}{a}}|0)$, $N_2(\sqrt{-\frac{c}{a}}|0)$. Die Funktionsgleichung der allgemeinen Parabel $y = ax^2 + c$ ergibt sich aus der Bestimmung der Unbekannten a und c wie folgt:

1. Ist c ist die y-Koordinate des Scheitelpunkts S(0|c) und liegt mit $P(x_1|y_1)$ ($x_1 \neq 0$) ein Punkt auf der Parabel, so lässt sich a auf Grund der Punktprobe (Einsetzen des Punktes P in die Parabelgleichung) berechnen als:

$$y_1 = ax_1+c \Leftrightarrow y_1-c = ax_1 \Leftrightarrow a = \frac{y_1 - c}{x_1}.$$

2. Liegen mit $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ ($x_1,x_2 \neq 0$, $x_1 \neq \pm x_2$) zwei Punkte auf der Parabel, so ergibt die Punktprobe mit beiden Punkten ein lineares Gleichungssystem mit den Unbekannten a und c:

$$(1)\ y_1 = ax_1+c$$
$$(2)\ y_2 = ax_2+c.$$

Subtraktion der Gleichungen voneinander führt auf:

$$(2)–(1)\ y_2–y_1= ax_2–ax_1 = a(x_2–x_1) \Leftrightarrow a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

durch das Einsetzen von $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ etwa in Gleichung (1) ergibt sich der Wert für c:

$$(1)\ y_1 = ax_1+c = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1+c \Leftrightarrow c = y_1–\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

II. Bei der Bestimmung der allgemeinen Parabelgleichung gehen wir wie folgt vor. Gemäß dem Ansatz der Funktionsgleichung als $y = ax^2 + c$ legen wir das x-y-Koordinatensystem so über das Schmuckstück, dass der Hochpunkt der Parabel auf der y-Achse und die Parabelenden auf der x-Achse liegen. Der Scheitelpunkt der Parabel ist wegen der Höhe des Schmuckstücks von 18 mm mithin: S(0|18). Die Parabelenden sind die Nullstellen der Parabel, die auf der x-Achse einen Abstand von 24 mm haben, also: N_1(-12|0), N_2(12|0).
Wir bestimmen in $y = ax^2 + c$ zunächst c als y-Koordinate des Scheitelpunkts und damit als: c = 18. Die Parabelgleichung lautet nun: $y = ax^2 + 18$. Punktprobe mit N(12|0) ergibt zudem:

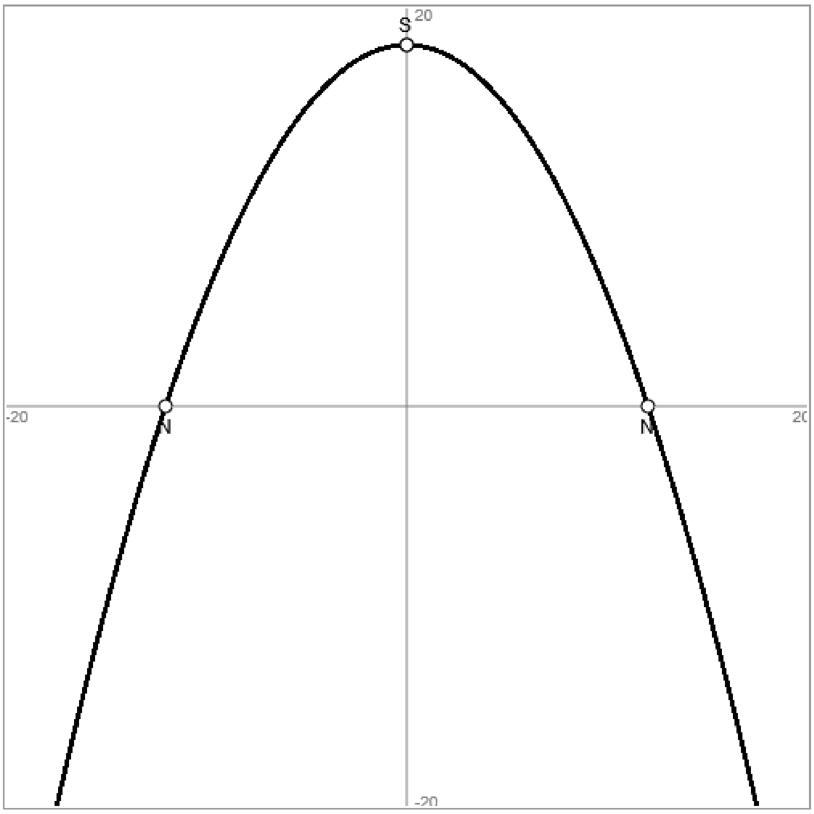
$$0 = a\cdot 12^2 + 18 \Leftrightarrow -18 = a\cdot 12^2 \Leftrightarrow a = -\frac{18}{12^2} = -\frac{18}{144} = -\frac{1}{8} = -0{,}125.$$

Die Parabelgleichung lautet also: $y = -\frac{1}{8}x^2 + 18$.

III. Wertetabelle und Graph der allgemeinen Parabel $y = -\frac{1}{8}x^2 + 18$ sind:

Wertetabelle:	
x =	**y** = $-0.125x^2 + 18$
-12	0
-11	2.875
-10	5.5
-9	7.875
-8	10
-7	11.875
-6	13.5
-5	14.875
-4	16
-3	16.875
-2	17.5
-1	17.875
0	18
1	17.875
2	17.5
3	16.875
4	16
5	14.875
6	13.5
7	11.875
8	10
9	7.875
10	5.5
11	2.875
12	0

Graph:



b) I. Der <u>Abstand</u> zweier Punkte $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ im x-y-Koordinatensystem lässt sich bestimmen als:

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

II. <u>Variante D</u>: Es ist der Umfang des Dreiecks N_1N_2S mit $N_1(-12|0)$, $N_2(12|0)$, $S(0|18)$ zu berechnen, wobei $\overline{N_1N_2}$ = 24 mm und wegen der Gleichschenkligkeit des Dreiecks $\overline{N_1S} = \overline{N_2S} = \sqrt{(0-12)^2 + (18-0)^2} = \sqrt{144+324} = \sqrt{468} = 21{,}63$ mm gilt. Der Umfang lautet also:

$L_D = 24 + 2\cdot 21{,}63 = 67{,}26$ mm

und gibt damit die Länge des in Variante D zu verwendenden Platindrahts an.

III. <u>Variante K</u>: Zunächst erhalten wir als Kreismittelpunkt M(0|9) (18:2 = 9) und als Kreisumfang wegen r = d/2 = 8/2 = 4 mm: $U_{Kreis} = 2\pi\cdot 4 = 25{,}13$ mm. Wir rechnen folgende Strecken aus: $\overline{MS}$ = 18-9 = 9 mm, $\overline{N_1M} = \overline{N_2M} = \sqrt{(0-12)^2 + (9-0)^2} = \sqrt{144+81} = \sqrt{225} = 15$ mm und berücksichtigen, dass bei den drei auf den Kreismittelpunkt führenden Strecken noch jeweils der Kreisradius abgezogen werden muss. Die Länge des in Variante K zu verwendenden Platindrahts beläuft sich damit auf:

$L_K = 25{,}13 + 2\cdot 15 – 3\cdot 4 = 43{,}13$ mm.

IV. <u>Ergebnis</u>: Die Länge des Platindrahts bei Variante K ist also kürzer als die bei Variante D.

www.michael-buhlmann.de / 06.2018 / Aufgabe 581