Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Gegeben ist die allgemeine Parabel p_1: $y=-\frac{1}{2}x^2+8$ und die nach oben geöffnete Normalparabel p_2: $y=x^2-4x$. Die zwei Nullstellen N_1, N_2 der Parabel p_1 sowie die Scheitelpunkte S_1 der Parabel p_1 und S_2 der Parabel p_2 bilden die Dreiecke $\Delta S_1N_1S_2$ und $\Delta S_2N_2S_1$. Wie verhalten sich die Flächeninhalte des Dreiecks $\Delta S_1N_1S_2$ und des Dreiecks $\Delta S_2N_2S_1$ zueinander?

Lösung: I. Die Nullstellen von allgemeinen Parabeln der Form $y = ax^2 + c$ errechnen sich als: $y = 0 \Leftrightarrow ax^2+c = 0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$ (rein quadratische Gleichung). Zur Bestimmung der Nullstellen einer Normalparabel $y = x^2 + bx + c$ ist die Gleichung: $y = 0$ zu lösen. Dies geschieht auf Grund von: $y = 0 \Leftrightarrow x^2+bx+c = 0 \Rightarrow x_{1,2}=-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-c}$ (b-c-Formel). Im Fall der Existenz der Lösungen x_1, x_2 heißen die Nullstellen: $N_1(x_1|0)$, $N_2(x_2|0)$ und sind Schnittpunkte mit der x-Achse des x-y-Koordinatensystems.

II. Allgemeine Parabeln der Form $y = ax^2+c$ haben den Scheitelpunkt $S(0|c)$. Im Fall der Normalform $y = x^2+bx+c$ einer Normalparabel kann die Bestimmung des Scheitelpunkts $S(d|e)$ mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erfolgen:

$$y=x^2+bx+c=x^2+bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

oder vermöge $d = -\frac{b}{2}$, so dass sich mit dem Einsetzen des Wertes $x = -\frac{b}{2}$ in die Parabelgleichung und dem Errechnen der y-Koordinaten $y = c-\left(\frac{b}{2}\right)^2 = e$ der Scheitelpunkt $S(d|e)$ ergibt.

III. Zur Geradenbestimmung lässt sich noch sagen: Aus zwei Punkten $P(x_P|y_P)$, $Q(x_Q|y_Q)$ lässt sich eine Gerade der Form g: $y = mx + c$ errechnen mit: $m = \frac{y_Q-y_P}{x_Q-x_P}$ und $c = y_P-mx_P$. Liegt ein Punkt $P(x_P|y_P)$ und die Steigung m vor, so lässt sich $c = y_P-mx_P$ direkt bestimmen. Die Nullstelle einer Geraden folgt mit den Gleichungsumformungen: $y = 0 \Leftrightarrow mx + c = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{c}{m}$ $(m \neq 0)$.

IV. Wir berechnen zunächst die Nullstellen der Parabel p_1: $y=-\frac{1}{2}x^2+8$ als:

$y = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+8 = 0 \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow 16 = x^2 \Leftrightarrow x = \pm 4$

und haben: $N_1(-4|0)$, $N_2(4|0)$.

V. Der Scheitelpunkt der allgemeinen Parabel p_1: $y = -\frac{1}{2}x^2 + 8$ kann unmittelbar abgelesen werden als: $S_1(0|8)$. Der Scheitelpunkt der nach oben geöffneten Normalparabel p_2: $y = x^2 - 4x$ ergibt sich mit Hilfe der quadratischen Ergänzung:

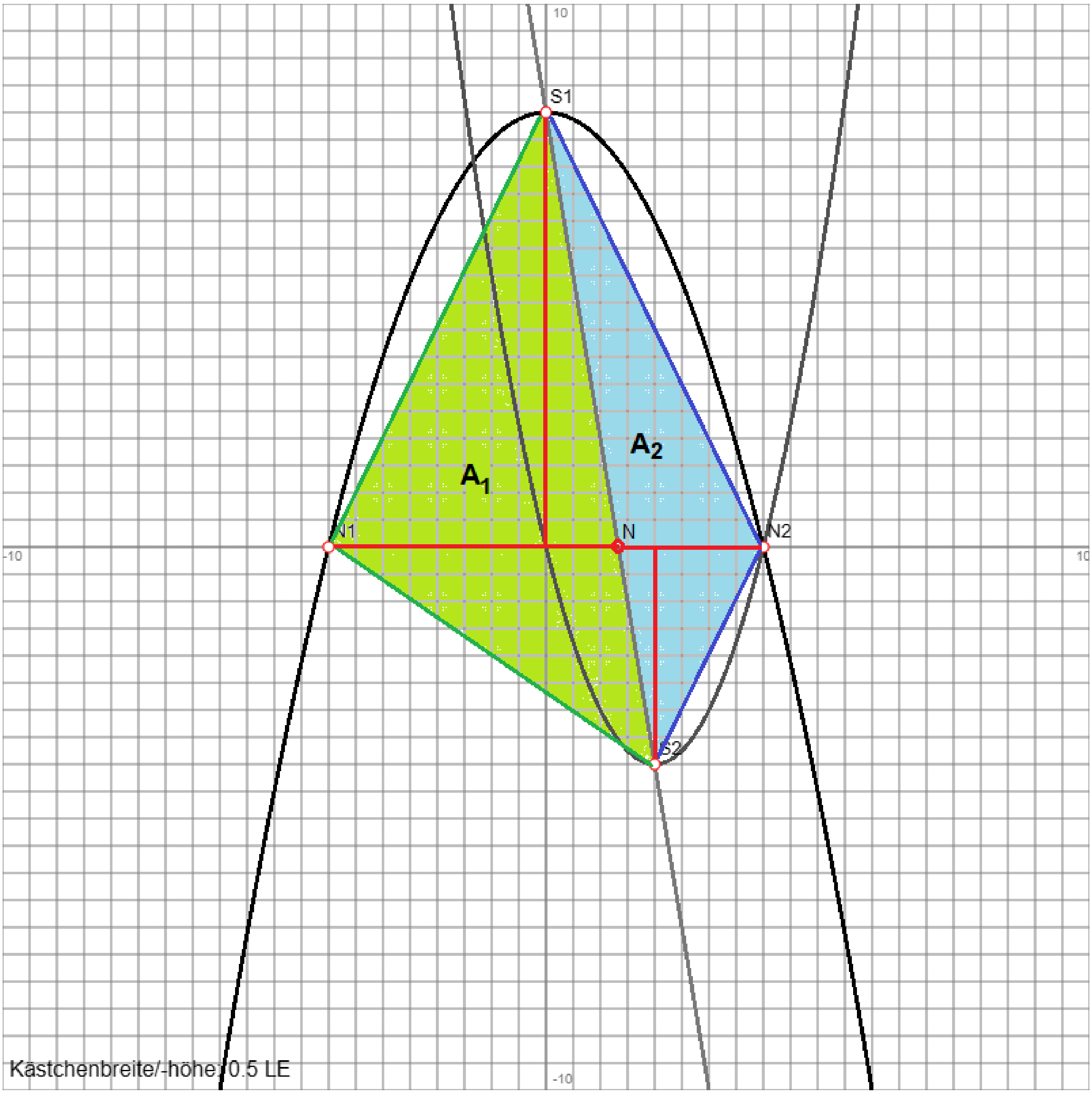
$$y = x^2 - 4x = x^2 - 4x + 2^2 - 2^2 = (x-2)^2 - 4$$

als: $S_2(2|-4)$.

VI. Wir benötigen noch die Gerade g durch die Scheitelpunkte $S_1(0|8)$ und $S_2(2|-4)$. Sie ist nun zu bestimmen. Mit dem Ansatz g: y = mx + c ergibt sich mit $S_1(0|8)$ sofort: c = 8, weiter: m = $\frac{-4-8}{2-0}$ = $\frac{-12}{2}$ = -6, so dass g: y = -6x + 8 erfüllt ist. Die Nullstelle der Geraden ist auf Grund von:

y = 0 ⇔ -6x + 8 = 0 ⇔ 8 = 6x ⇔ x = 4/3

der Punkt N(4/3|0).



VII. Die Gerade g schneidet die (waagerechte) Strecke $\overline{N_1N_2}$ bei x = 4/3, die Teilstrecken $\overline{N_1N}$ und $\overline{NN_2}$ sind g_1 = $\overline{N_1N}$ = 4/3 – (-4) = 16/3 LE und g_2 = $\overline{NN_2}$ = 4 – 4/3 = 8/3 LE groß. Der Scheitelpunkt $S_1(0|8)$ ist (horizontal) von der x-Achse $h_1 = 8 - 0 = 8$ LE, der Scheitelpunkt $S_2(2|-4)$ von der x-Achse $h_2 = 0 - (-4) = 4$ LE entfernt. Damit sind <u>Grundseiten</u> g_1, g_2 und <u>Höhen</u> h_1, h_2 der vier Dreiecke gegeben, von denen je zwei den Flächeninhalt A_1 des Dreiecks $\Delta S_1N_1S_2$ und A_2 des Dreiecks $\Delta S_2N_2S_1$ bilden.

VIII. Der <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks $\Delta S_1N_1S_2$ berechnet sich (aus dem von zwei Dreiecken) als:

$A_1 = \frac{1}{2}g_1h_1 + \frac{1}{2}g_1h_2 = \frac{1}{2}g_1(h_1+h_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot(8+4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{16}{3}\cdot 12 = 2\cdot 16 = 32$ FE,

der des Dreiecks $\Delta S_2N_2S_1$ (ebenfalls aus dem von zwei Dreiecken) als:

$A_2 = \frac{1}{2}g_2h_1 + \frac{1}{2}g_2h_2 = \frac{1}{2}g_2(h_1+h_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot(8+4) = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}\cdot 12 = 2\cdot 8 = 16$ FE.

IX. Wir bilden das Verhältnis der beiden Flächeninhalte A_1 und A_2 zueinander:

$A_1:A_2 = 32:16 = 2:1$,

d.h.: die Fläche A_1 ist doppelt so groß wie die Fläche A_2.

(FE = Flächeneinheiten, LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 12.2023 / Aufgabe 1959