Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Funktionen
> Parabeln

Aufgabe: Forme die Normalform der nach oben geöffneten Normalparabel p: $y = x^2 - 8x + 7$ vermöge der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und zeichne den Graphen der Parabel.

Lösung: I. Es gilt für die Normalform einer Parabel p: $y = x^2 + bx + c$ und die Scheitelform p: $y = (x-d)^2 + e$ hinsichtlich der <u>quadratischen Ergänzung</u> und damit der Umformung von Normal- in Scheitelform:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x-d)^2 + e$$

mit: $d = -\frac{b}{2}$, $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ und dem Scheitelpunkt S(d|e).

II. Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 - 8x + 7$ in der <u>Normalform</u> mit den Koeffizienten b = -8 und c = 7. Der Betrag des Koeffizienten b = -8 wird halbiert zu $\frac{|b|}{2} = 4$ und der Ausdruck $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4^2$ als <u>quadratische Ergänzung</u> hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$y = x^2 - 8x + 7 = x^2 - 8x \underline{+ 4^2} + 7 \underline{- 4^2}$.

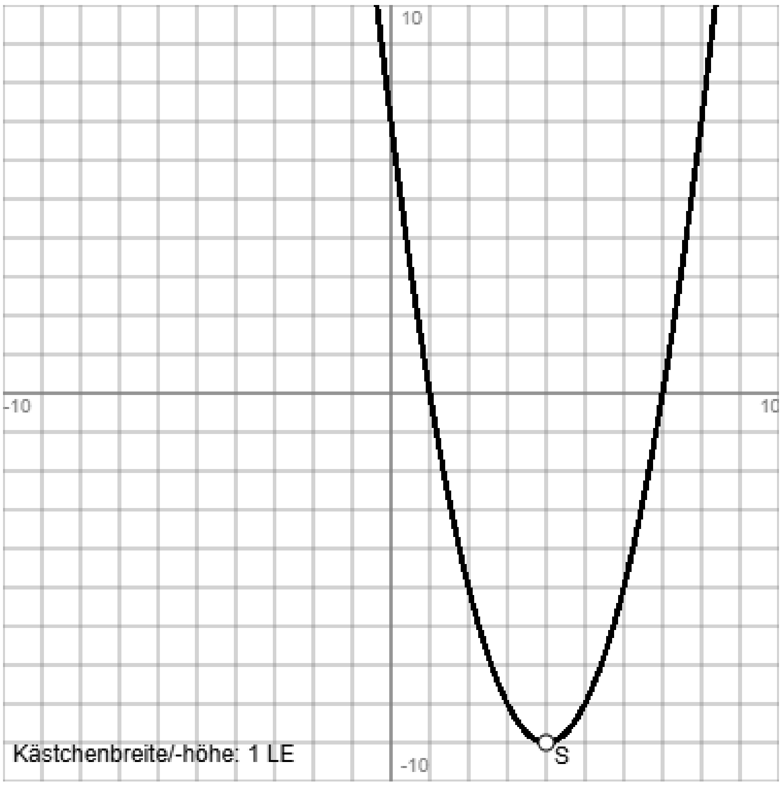
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 2. binomischen Formel ($\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 = (\alpha-\beta)^2$, $\alpha=x$, $\beta=4$) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$y = x^2 - 8x + 7 = \underline{x^2 - 8x + 4^2} + 7 - 4^2 = \underline{(x-4)^2} - 9$.

Es ergeben sich die <u>Scheitelform</u> des Parabelterms p: $y = (x-4)^2 - 9$ mit den Koordinaten d = 4, e = -9 des Scheitelpunkts S(4|-9) und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$y = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$.

III. Wir erhalten damit (über den Scheitelpunkt S und davon ausgehend andere Parabelpunkte) den <u>Graphen</u> der Normalparabel $y = x^2 - 8x + 7 = (x-4)^2 - 9$:



IV. Punkte auf dem Graphen einer (nach oben geöffneten) Normalparabel lassen sich vom (errechneten) Scheitelpunkt S(d|e) wie folgt bestimmen: Die Parabelpunkte $P_1(d\pm1|e+1)$ finden sich im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1 nach oben vom Scheitelpunkt aus, die Parabelpunkte $P_2(d\pm2|e+4)$ eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 3 nach oben von den Parabelpunkten P_1, die Parabelpunkte $P_3(d\pm3|e+9)$ eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 5 nach oben von den Parabelpunkten P_2 usw. (d.h. mit jeweils einer Längeneinheit nach rechts bzw. links und der nächst ungeraden Längeneinheit nach oben). Alternativ ist eine den Scheitelpunkt S enthaltene Wertetabelle eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) zu nutzen oder eine Normalparabelschablone, die im x-y-Koordinatensystem senkrecht am Scheitelpunkt S angelegt wird.