

# Mathematikaufgaben

## > Funktionen

### > Parabeln

**Aufgabe:** Forme die Normalform der nach oben geöffneten Normalparabel  $p: y = x^2 + 1.5x + 2.75$  vermöge der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und zeichne den Graphen der Parabel.

**Lösung:** I. Es gilt für die Normalform einer Parabel  $p: y = x^2 + bx + c$  und die Scheitelform  $p: y = (x-d)^2 + e$  hinsichtlich der quadratischen Ergänzung und damit der Umformung von Normal- in Scheitelform:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x-d)^2 + e$$

mit:  $d = -\frac{b}{2}$ ,  $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$  und dem Scheitelpunkt  $S(d|e)$ .

II. Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel  $y = x^2 + 1.5x + 2.75$  in der Normalform mit den Koeffizienten  $b = 1.5$  und  $c = 2.75$ . Der Betrag des Koeffizienten  $b = 1.5$  wird halbiert zu  $\frac{|b|}{2} = 0.75$  und der Ausdruck  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 0.75^2$  als quadratische Ergänzung hinter dem  $x$  des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$$y = x^2 + 1.5x + 2.75 = x^2 + 1.5x + 0.75^2 + 2.75 - 0.75^2.$$

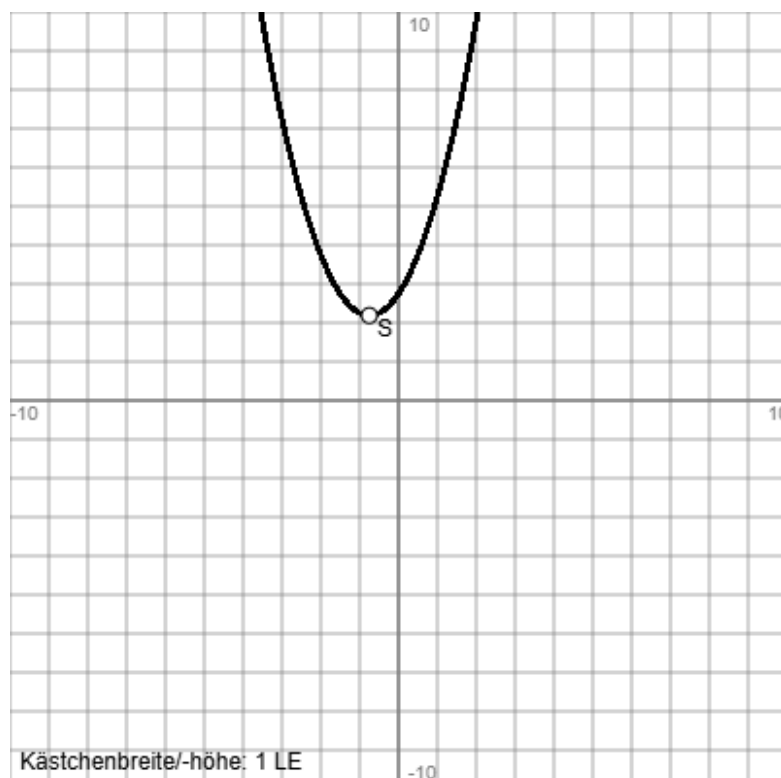
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 1. binomischen Formel ( $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$ ,  $\alpha = x$ ,  $\beta = 0.75$ ) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$$y = x^2 + 1.5x + 2.75 = x^2 + 1.5x + 0.75^2 + 2.75 - 0.75^2 = (x + 0.75)^2 + 2.1875.$$

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms  $p: y = (x + 0.75)^2 + 2.1875$  mit den Koordinaten  $d = -0.75$ ,  $e = 2.1875$  des Scheitelpunkts  $S(-0.75|2.1875)$  und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$$y = x^2 + 1.5x + 2.75 = (x + 0.75)^2 + 2.1875.$$

III. Wir erhalten damit (über den Scheitelpunkt  $S$  und davon ausgehend andere Parabelpunkte) den Graphen der Normalparabel  $y = x^2 + 1.5x + 2.75 = (x + 0.75)^2 + 2.1875$ :



IV. Punkte auf dem Graphen einer (nach oben geöffneten) Normalparabel lassen sich vom (errechneten) Scheitelpunkt  $S(d|e)$  wie folgt bestimmen: Die Parabelpunkte  $P_1(d \pm 1|e+1)$  finden sich im x-y-Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1 nach oben vom Scheitelpunkt aus, die Parabelpunkte  $P_2(d \pm 2|e+4)$  eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 3 nach oben von den Parabelpunkten  $P_1$ , die Parabelpunkte  $P_3(d \pm 3|e+9)$  eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 5 nach oben von den Parabelpunkten  $P_2$  usw. (d.h. mit jeweils einer Längeneinheit nach rechts bzw. links und der nächst ungeraden Längeneinheit nach oben). Alternativ ist eine den Scheitelpunkt  $S$  enthaltene Wertetabelle eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) zu nutzen oder eine Normalparabelschablone, die im x-y-Koordinatensystem senkrecht am Scheitelpunkt  $S$  angelegt wird.