

# Mathematikaufgaben

## > Funktionen

### > Parabeln

**Aufgabe:** Forme die Normalform der nach oben geöffneten Normalparabel  $p: y = x^2 - 4x + 7$  vermöge der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und zeichne den Graphen der Parabel.

**Lösung:** I. Es gilt für die Normalform einer Parabel  $p: y = x^2 + bx + c$  und die Scheitelform  $p: y = (x-d)^2 + e$  hinsichtlich der quadratischen Ergänzung und damit der Umformung von Normal- in Scheitelform:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x-d)^2 + e$$

mit:  $d = -\frac{b}{2}$ ,  $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$  und dem Scheitelpunkt  $S(d|e)$ .

II. Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel  $y = x^2 - 4x + 7$  in der Normalform mit den Koeffizienten  $b = -4$  und  $c = 7$ . Der Betrag des Koeffizienten  $b = -4$  wird halbiert zu  $\frac{|b|}{2} = 2$  und der Ausdruck  $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 2^2$  als quadratische Ergänzung hinter dem  $x$  des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$$y = x^2 - 4x + 7 = x^2 - 4x + \underline{2^2} + 7 - \underline{2^2}.$$

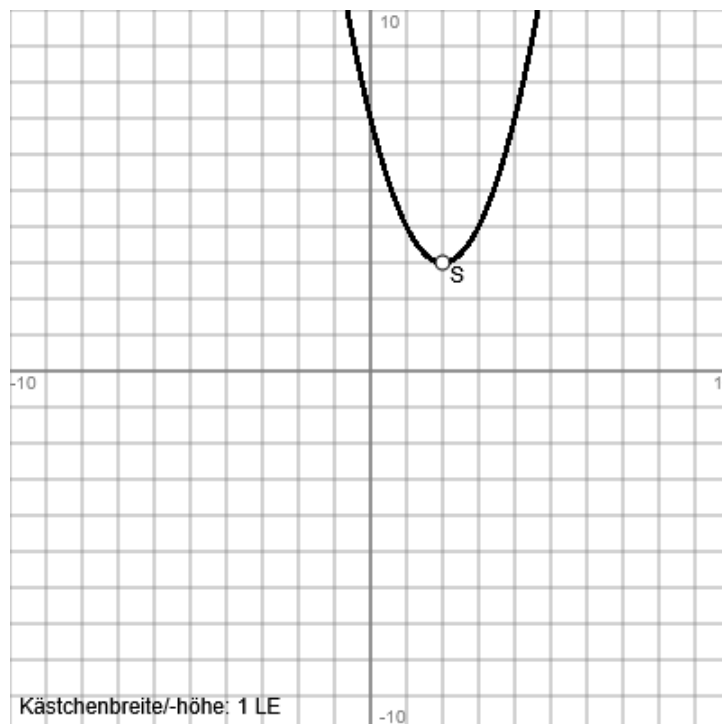
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 2. binomischen Formel ( $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$ ,  $\alpha = x$ ,  $\beta = 2$ ) umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$$y = x^2 - 4x + 7 = \underline{x^2 - 4x + 2^2} + \underline{7 - 2^2} = \underline{(x-2)^2} + \underline{3}.$$

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms  $p: y = (x-2)^2 + 3$  mit den Koordinaten  $d = 2$ ,  $e = 3$  des Scheitelpunkts  $S(2|3)$  und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$$y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3.$$

III. Wir erhalten damit (über den Scheitelpunkt  $S$  und davon ausgehend andere Parabelpunkte) den Graphen der Normalparabel  $y = x^2 - 4x + 7 = (x-2)^2 + 3$ :



IV. Punkte auf dem Graphen einer (nach oben geöffneten) Normalparabel lassen sich vom (errechneten) Scheitelpunkt  $S(d|e)$  wie folgt bestimmen: Die Parabelpunkte  $P_1(d \pm 1 | e + 1)$  finden sich im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1 nach oben vom Scheitelpunkt aus, die Parabelpunkte  $P_2(d \pm 2 | e + 4)$  eine Längeneinheit

nach rechts bzw. links und 3 nach oben von den Parabelpunkten  $P_1$ , die Parabelpunkte  $P_3(d \pm 3|e+9)$  eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 5 nach oben von den Parabelpunkten  $P_2$  usw. (d.h. mit jeweils einer Längeneinheit nach rechts bzw. links und der nächst ungeraden Längeneinheit nach oben). Alternativ ist eine den Scheitelpunkt S enthaltene Wertetabelle eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) zu nutzen oder eine Normalparabelschablone, die im x-y-Koordinatensystem senkrecht am Scheitelpunkt S angelegt wird.