

Mathematikaufgaben

> Funktionen

> Parabeln

Aufgabe: Forme die Normalform der nach oben geöffneten Normalparabel $p: y = x^2 + 2x - 6$ vermöge der quadratischen Ergänzung in die Scheitelform um und zeichne den Graphen der Parabel.

Lösung: I. Es gilt für die Normalform einer Parabel $p: y = x^2 + bx + c$ und die Scheitelform $p: y = (x-d)^2 + e$ hinsichtlich der quadratischen Ergänzung und damit der Umformung von Normal- in Scheitelform:

$$y = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + c - \left(\frac{b}{2}\right)^2 = (x-d)^2 + e$$

mit: $d = -\frac{b}{2}$, $e = c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ und dem Scheitelpunkt $S(d|e)$.

II. Gegeben ist die (nach oben geöffnete, verschobene) Normalparabel $y = x^2 + 2x - 6$ in der Normalform mit den Koeffizienten $b = 2$ und $c = -6$. Der Betrag des Koeffizienten $b = 2$ wird halbiert zu $\frac{|b|}{2} = 1$ und der Ausdruck $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1^2$ als quadratische Ergänzung hinter dem x des Parabelterms addiert und an dessen Ende subtrahiert:

$$y = x^2 + 2x - 6 = x^2 + 2x + 1^2 - 6 - 1^2.$$

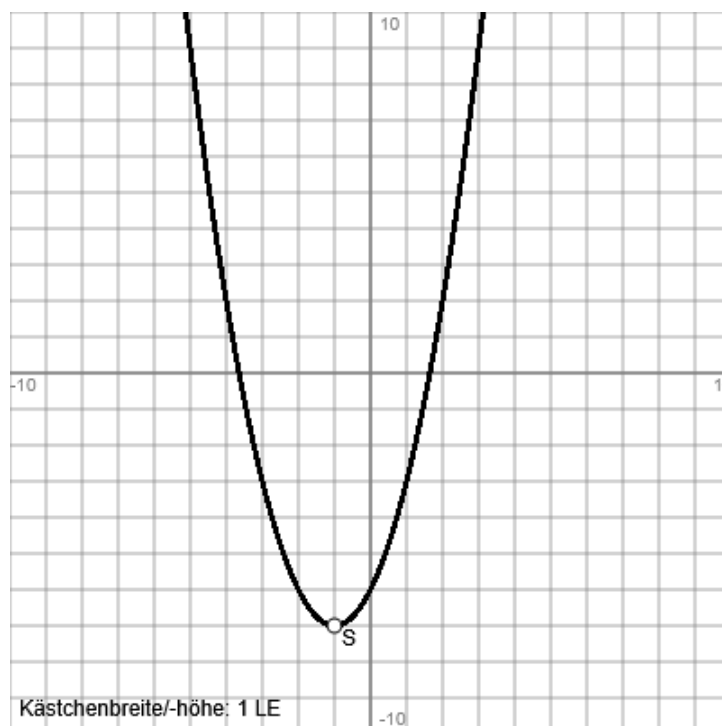
Die ersten drei Summanden des solcherart veränderten Funktionsterms lassen sich dann nach der 1. binomischen Formel $(\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2, \alpha = x, \beta = 1)$ umformen, die beiden letzten Summanden werden zusammengezählt:

$$y = x^2 + 2x - 6 = \underline{x^2 + 2x + 1^2} - \underline{6} - \underline{1^2} = \underline{(x+1)^2} - \underline{7}.$$

Es ergeben sich die Scheitelform des Parabelterms $p: y = (x+1)^2 - 7$ mit den Koordinaten $d = -1$, $e = -7$ des Scheitelpunkts $S(-1|-7)$ und zusammenfassend die Identität von Normal- und Scheitelform:

$$y = x^2 + 2x - 6 = (x+1)^2 - 7.$$

III. Wir erhalten damit (über den Scheitelpunkt S und davon ausgehend andere Parabelpunkte) den Graphen der Normalparabel $y = x^2 + 2x - 6 = (x+1)^2 - 7$:



IV. Punkte auf dem Graphen einer (nach oben geöffneten) Normalparabel lassen sich vom (errechneten) Scheitelpunkt $S(d|e)$ wie folgt bestimmen: Die Parabelpunkte $P_1(d \pm 1 | e + 1)$ finden sich im x - y -Koordinatensystem eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 1 nach oben vom Scheitelpunkt aus, die Parabelpunkte $P_2(d \pm 2 | e + 4)$ eine Längeneinheit

nach rechts bzw. links und 3 nach oben von den Parabelpunkten P_1 , die Parabelpunkte $P_3(d \pm 3|e+9)$ eine Längeneinheit nach rechts bzw. links und 5 nach oben von den Parabelpunkten P_2 usw. (d.h. mit jeweils einer Längeneinheit nach rechts bzw. links und der nächst ungeraden Längeneinheit nach oben). Alternativ ist eine den Scheitelpunkt S enthaltene Wertetabelle eines wissenschaftlichen Taschenrechners (WTR) zu nutzen oder eine Normalparabelschablone, die im x-y-Koordinatensystem senkrecht am Scheitelpunkt S angelegt wird.