Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Algebra
> Polynomgleichungen (Polynomdivision)

Aufgabe: Löse die Gleichung:

$$x^3+x^2-10x+8 = 0,$$

wenn als eine Lösung x=-4 gegeben ist.

1. Lösung: I. Obige Gleichung wird u.a. mit der Polynomdivision und der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst.

Bei einer Polynomdivision mit einem Linearfaktor als Teiler und von der Form „x minus eine Lösung der Gleichung" gilt unter der Voraussetzung der Teilbarkeit (ohne Rest) die Termumformung:

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(ax-x_0) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0$$

(a, a_0, … a_n reell; a, $a_n \neq 0$), wobei sich die Zahlen b_{n-1}, b_{n-2}, … b_0 nacheinander gemäß dem folgenden Algorithmus ergeben:

Algorithmus zur Polynomdivision

1) Durch Division von a_n durch a wird $b_{n-1} = a_n/a$ berechnet.
2) Durch Multiplikation des Teilers $(ax-x_0)$ mit $b_{n-1}x^{n-1}$ entsteht der Term $b_{n-1}ax^n-b_{n-1}x_0x^{n-1}$.
3) Vom Polynom $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ wird der Term $b_{n-1}ax^n-b_{n-1}x_0x^{n-1}$ abgezogen.
4) Mit dem durch Subtraktion erhaltenen neuen Polynom $a'_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ bei $a'_{n-1} = a_{n-1}-b_{n-1}x_0$ werden die Schritte 1) bis 3) u.a. mit der Bestimmung von b_{n-2} wiederholt.
5) Das Verfahren endet, wenn die Subtraktion in Schritt 3) den Rest 0 ergibt.

Für das Lösen von quadratischen Gleichungen ergibt sich die folgende Vorgehensweise: Quadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, $a\neq 0$, genügen. Die Lösung der quadratischen Gleichung (*) ist dann: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Die a-b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen der Gleichung.

II. Wir führen bei der Gleichung

$x^3+x^2-10x+8 = 0$ (*)

zunächst die Polynomdivision durch, indem wir auf Grund der vorgegebenen Gleichungslösung x=-4 den Teiler als Linearfaktor (x–(-4)) = (x+4) bestimmen. Die Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3+x^2-10x+8):(x+4) = x^2-3x+2 \\
\underline{-(x^3+4x^2)} \\
\quad -3x^2-10x \\
\quad \underline{-(-3x^2-12x)} \\
\qquad\quad 2x+8 \\
\qquad\quad \underline{-(2x+8)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

gelangt damit auf den quadratischen Term: x^2-3x+2.

III. Die Gleichung (*) wird durch die vorangegangene Polynomdivision zu einer quadratischen Gleichung:

$x^3+x^2-10x+8 = 0$	(Polynomdivision)
$x = -4$, $x^2-3x+2 = 0$	(a-b-c-Formel: a = 1, b = -3, c = 2)

x = -4, $x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$

x = -4, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$

x = -4, $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$

x = -4, $x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$

x = -4, $x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, $x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Die Gleichung (*) hat somit die Lösungen: x=-4, x=1, x=2; ihre Lösungsmenge ist: L = {-4, 1, 2}.

2. Lösung: I. Obige Gleichung wird u.a. mit der Polynomdivision und der Lösungsformel für quadratische Gleichungen gelöst.

Eine Polynomdivision lässt sich mit dem Hornerschema durchführen. Ist die Polynomdivision vom Typ

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(x–x_0)$$

($a_0, \ldots a_n$ reell; $a_n \neq 0$), so gilt das

Hornerschema

	a_n	a_{n-1} x_0b_{n-1}	a_{n-2} x_0b_{n-2}	…	a_1 x_0b_1	a_0 x_0b_0
x_0	$b_{n-1} = a_n$	$b_{n-2} =$ $a_{n-1} + x_0b_{n-1} =$ $a_{n-1} + x_0a_n$	$b_{n-3} =$ $a_{n-2} + x_0b_{n-2} =$ $a_{n-2} + x_0a_{n-1} + x_0^2a_n$	b_1	$b_0 =$ $a_1 + x_0b_1 =$ $a_1 + x_0a_2 + x_0^2a_3$ $+ \ldots + x_0^{n-1}a_n$	$r_0 =$ $a_0 + x_0b_0 =$ $a_0 + x_0a_1 + x_0^2a_2$ $+ \ldots + x_0^na_n$

mit den Koeffizienten des Polynoms $a_0, a_1, \ldots a_n$, der Stelle x_0, $r_0 = f(x_0)$ als Rest und im Fall $r_0 = 0$ den Zahlen $b_0, b_1, \ldots b_{n-1}$ als Koeffizienten des reduzierten Polynoms $f_1(x) = b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + b_0$.
Im Horner-Schema wird also wie folgt gerechnet:

I. Die Spalte j des Schemas (j=0,…n) enthält in Zeile 1 den Koeffizienten a_{n-j} des Polynoms f(x).
II. Für die Spalte 0 des Schemas ergibt sich die Zahl b_{n-1} in Zeile 3 als Koeffizient a_n des Polynoms.
III. In der Spalte j des Schemas (j=1,…n) errechnet man die Zahl in Zeile 2, indem man die Stelle x_0 mit dem Wert der Vorgängerspalte in Zeile 3, mit b_{n-j+1} multipliziert. Die Summe der Werte in Zeile 1 und Zeile 2 ergibt die Zahl in Zeile 3, d.h. b_{n-j}.

und damit das Ergebnis der Polynomdivision:

$$(a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0):(x–x_0) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \ldots + b_1x + b_0.$$

Für das Lösen von quadratischen Gleichungen ergibt sich die folgende Vorgehensweise: Quadratische Gleichungen sind Gleichungen mit der Variablen x, die der Form $ax^2 + bx + c = 0$ (*) mit reellen Zahlen a, b, c, $a \neq 0$, genügen. Die Lösung der quadratischen Gleichung (*) ist dann: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (a-b-c-Formel). Die a-b-c-Formel führt auf die 0 bis 2 Lösungen der Gleichung.

II. Wir führen bei der Gleichung

$x^3+x^2–10x+8 = 0$ (*)

zunächst die Polynomdivision durch, indem wir auf Grund der vorgegebenen Gleichungslösung x=-4 den Teiler als Linearfaktor (x–(-4)) = (x+4) bestimmen. Es ergibt sich das Hornerschema zur Polynomdivision für das Polynom $x^3+x^2–10x+8$ (mit den Koeffizienten 1, 1, -10, 8) und die Stelle $x_0 = -4$:

	1	1 (-4) 1·= -4	-10 (-4) (-3)·= 12	8 (-4) 2 = -8
-4	$\boxed{1}$	1 – 4 = $\boxed{-3}$	-10 + 12 = $\boxed{2}$	8 – 8 = 0

Die eingerahmten Werte (1, -3, 2) sind die Koeffizienten des durch das Teilen entstandenen Polynoms x^2-3x+2; es gilt also:

$(x^3+x^2-10x+8):(x+4) = x^2-3x+2$.

III. Die Gleichung (*) wird durch die vorangegangene Polynomdivision zu einer <u>quadratischen Gleichung</u>:

$x^3+x^2-10x+8 = 0$ (Polynomdivision)

$x = -4,\ x^2-3x+2 = 0$ (a-b-c-Formel: a = 1, b = -3, c = 2)

$$x = -4,\ x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = -4,\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$

$$x = -4,\ x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = -4,\ x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x = -4,\ x_1 = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1,\ x_2 = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Die Gleichung (*) hat somit die Lösungen: x=-4, x=1, x=2; ihre Lösungsmenge ist: L = {-4, 1, 2}.

www.michael-buhlmann.de / 03.2017 / Aufgabe 331