Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme unter Verwendung der geometrischen Reihe die Potenz-/Taylorreihe der Funktion:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2}\text{ , } -1<x<1.$$

Lösung: I. Die <u>geometrische Reihe</u> (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) lautet für reelle z:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}\text{ , } -1<z<1 \text{ (*).}$$

II. Wir formen die vorgegebene Funktion zunächst etwas um:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x \cdot \frac{1}{1-x^2}\text{ ,}$$

nutzen die geometrische Reihe (*), indem wir $z = x^2$ setzen, und erhalten:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = x \cdot \frac{1}{1-x^2} = x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} (x^2)^i = x \cdot \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i+1}\text{ .}$$

Die gesuchte <u>Potenz-/Taylorreihe</u> lautet also:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i+1}\text{ .}$$

Die Reihe konvergiert für $-1<z<1 \Leftrightarrow -1<x^2<1 \Leftrightarrow -1<x<1$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1202