Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Potenzreihenentwicklung (Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$) der Funktion:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}.$$

Lösung: I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der Sinusfunktion (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$); diese lautet für alle reellen x:

$$\sin x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \quad (*).$$

Auch gilt für die geometrische Reihe (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) mit reellen z:

$$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}, \ -1<z<1 \ (**).$$

II. Es gilt u.a. mit $z = -x^2$ in der geometrischen Reihe sowie mit Hilfe des Cauchyprodukts für absolut konvergente Potenzreihen:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = \sin x \cdot \frac{1}{1+x^2} = \sin x \cdot \frac{1}{1-(-x^2)} \underset{(*),(**)}{=} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-x^2)^j \right) =$$

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2i+1)!} x^{2i+1} \right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j x^{2j} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \cdot (-1)^{n-k} x^{2(n-k)} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+n-k}}{(2k+1)!} x^{2k+1+2(n-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{(2k+1)!} x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}.$$

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$$f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)!} \right) (-1)^n x^{2n+1}.$$

Die Reihe konvergiert für alle x mit: -1<x<1.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1206