Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: Bestimme eine Potenzreihenentwicklung (Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$) der Funktion:

$$f(x) = \text{artanh}(x).$$

Lösung: I. Voraussetzen können wir die Reihenentwicklung der geometrischen Reihe (Potenzreihe, Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $z_0 = 0$) mit reellen z:

$\sum_{i=0}^{\infty} z^i = \frac{1}{1-z}$, $-1<z<1$ (*).

II. Die Ableitung des Areatangens hyperbolicus ist:

$f(x) = \text{artanh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.

Die Ableitungsfunktion f'(x) lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln ($z = x^2$ in (*)):

$f'(x) = \frac{1}{1-x^2} \underset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{\infty} (x^2)^i = \sum_{i=0}^{\infty} x^{2i}$,

so dass gliedweise Integration der Potenzreihe hinführt zu:

$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} x^{2i+1}$.

Die gesuchte Potenz-/Taylorreihe lautet also:

$f(x) = \text{artanh}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2i+1} x^{2i+1}$.

Die Reihe konvergiert für alle x mit: $-1<x<1$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1208