**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Analysis
## > Potenzreihen

---

**Aufgabe**: Bestimme eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0$ = 20 zu der Funktion:

$$f(x) = \frac{1}{20+x}.$$

**Lösung**: I. Zu einer unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktion bestimmt sich die Taylorreihe T(x) mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0$ als:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \;.$$

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe sind dann Funktion und Taylorreihe identisch mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i \;,$$

der Konvergenzradius R (reellwertig oder +∞) bestimmt sich z.B. mit:

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{i->\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\right|}} \;,$$

im Konvergenzintervall ($x_0$-R; $x_0$+R) konvergiert die Potenzreihe, an den Intervallrändern ist Konvergenz oder Divergenz möglich, außerhalb des Intervalls [$x_0$-R; $x_0$+R] divergiert die Potenzreihe. Eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0$ = 0 heißt zudem Maclaurinreihe mit:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}x^i \;.$$

II. Wir bestimmen die Folge der Ableitungen der Bruchfunktion:

f(x) = $\frac{1}{20+x}$ = $(20+x)^{-1}$ => f'(x) = $-1\cdot(20+x)^{-2}$ => f''(x) = $2\cdot(20+x)^{-3}$ => f'''(x) = $-6\cdot(20+x)^{-4}$ =>
f''''(x) = $24\cdot(20+x)^{-5}$, ....
und haben an der Stelle $x_0$ = π/2 die Werte:
f(20) = 1/40, f'(20) = $-1/40^2$, f''(20) = $2/40^3$, f'''(20) = $-6/40^4$, f''''(20) = $24/40^5$, …,
so dass allgemein gilt:
$f^{(i)}(20) = (-1)^i\cdot i!/40^{i+1}$, iε$\mathbf{N_0}$.
Es ergibt sich als Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0$ = 20 somit:

$$f(x) = \frac{1}{20+x} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\frac{(-1)^i \cdot i!}{40^{i+1}}}{i!}(x-20)^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{40^{i+1}}(x-20)^i \;.$$

Die Reihe konvergiert für alle reellen -40<x-20<40 ⇔ -20<x<60 auf Grund von:

$$\lim_{i->\infty}\sqrt[i]{\left|\frac{(-1)^i}{40^{i+1}}\right|} = \lim_{i->\infty}\sqrt[i]{\frac{1}{40^{i+1}}} = \lim_{i->\infty}\left(\frac{1}{40}\cdot\sqrt[i]{\frac{1}{40}}\right) = \frac{1}{40}\cdot\left(\lim_{i->\infty}\sqrt[i]{\frac{1}{40}}\right) = \frac{1}{40}\cdot 1 = \frac{1}{40} \text{ => R = 40.}$$

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1214