Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Analysis
> Potenzreihen

Aufgabe: a) Bestimme die Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ zur natürlichen Logarithmusfunktion:

$$f(x) = \ln(1+x).$$

b) Bestimme den Wert der Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}.$$

c) Gib hinreichend genaue Näherungen für den Wert von ln(2) an.

Lösung: a) I. Zu einer unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktion bestimmt sich die Taylorreihe T(x) mit Entwicklungsmittelpunkt x_0 als:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i .$$

Im Konvergenzbereich der Potenzreihe sind dann Funktion und Taylorreihe identisch mit:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i ,$$

der Konvergenzradius R (reellwertig oder +∞) bestimmt sich z.B. mit:

$$R = \frac{1}{\lim_{i->\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\right|}} ,$$

im Konvergenzintervall (x_0-R; x_0+R) konvergiert die Potenzreihe, an den Intervallrändern ist Konvergenz oder Divergenz möglich, außerhalb des Intervalls [x_0-R; x_0+R] divergiert die Potenzreihe. Eine Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ heißt zudem Maclaurinreihe mit:

$$T(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(0)}{i!} x^i .$$

II. Wir bestimmen die Folge der Ableitungen der natürlichen Logarithmusfunktion:

f(x) = $\ln(1+x)$ => f'(x) = $\frac{1}{1+x}$ = $(1+x)^{-1}$ => f''(x) = $-(1+x)^{-2}$ = $\frac{-1}{(1+x)^2}$ => f'''(x) = $2\cdot(1+x)^{-3}$ = $\frac{2}{(1+x)^3}$

=> f''''(x) = $-6\cdot(20+x)^{-4}$ = $\frac{-6}{(1+x)^4}$ => .... $f^{(i)}(x)$ = $\frac{(-1)^{i+1}(i-1)!}{(1+x)^i}$, i = 1, 2, …

und haben an der Stelle $x_0 = 0$ die Werte:

f(0) = ln(1) = 0, f'(0) = 1, f''(0) = -1, f'''(0) = 2, f''''(0) = -6, …, $f^{(i)}(0)$ = $(-1)^{i+1}(i-1)!$, i = 1, 2, …

Es ergibt sich als Taylorreihe mit Entwicklungsmittelpunkt $x_0 = 0$ somit:

$$f(x) = \ln(1+x) = 0 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}\cdot(i-1)!}{i!}(x-0)^i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} x^i .$$

Die Reihe konvergiert für alle reellen -1<x<1 auf Grund von:

$$\lim_{i->\infty} \sqrt[i]{\left|\frac{(-1)^{i+1}}{i}\right|} = \lim_{i->\infty} \sqrt[i]{\frac{1}{i}} = 1 \text{ => R = 1.}$$

Zudem ist die Taylorreihe für x = 1 konvergent, da dann die Folge der Summanden alternierend und eine Nullfolge ist. Die Taylorreihe konvergiert mithin für: -1<x≤1.

b) Da Funktion f(x) = $\ln(1+x)$ und Taylorreihe auf dem Konvergenzintervall (-1; 1] übereinstimmen, gilt wegen f(2) = ln(2):

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i} = \ln(2),$$

womit der Wert der Reihe mit alternierenden Summanden bestimmt ist.

c) Partialsummen $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i}$ können Näherungen für den Wert von ln(2) liefern. Allerdings konvergiert die Reihe langsam, so dass n genügend groß zu wählen ist:

Wertetabelle:		
n	$\mathbf{a_n}$ = f(n)	$\mathbf{s_n}$ = s_{n-1}+a_n
1	1	1
2	-0.5	0.5
3	0.3333333333333333	0.8333333333333333
4	-0.25	0.5833333333333333
5	0.2	0.7833333333333332
6	-0.1666666666666666	0.6166666666666666
7	0.14285714285714285	0.7595238095238095
8	-0.125	0.6345238095238095
9	0.1111111111111111	0.7456349206349207
10	-0.1	0.6456349206349207
101	0.009900990099009901	0.6980731694092049
102	-0.00980392156862745	0.6882692478405775
103	0.009708737864077669	0.6979779857046552
104	-0.009615384615384616	0.6883626010892706
105	0.009523809523809525	0.6978864106130801
106	-0.009433962264150943	0.6884524483489292
107	0.009345794392523364	0.6977982427414525
108	-0.009259259259259259	0.6885389834821932
109	0.009174311926605505	0.6977132954087988
110	-0.00909090909090909	0.6886223863178897
1001	0.000999000999000999	0.6936464315588232
1002	-0.000998003992015968	0.6926484275668072
1003	0.0009970089730807576	0.693645436539888
1004	-0.00099601593625498	0.692649420603633
1005	0.0009950248756218905	0.6936444454792549
1006	-0.0009940357852882703	0.6926504096939666
1007	0.0009930486593843098	0.693643458353351
1008	-0.000992063492063492	0.6926513948612875
1009	0.0009910802775024777	0.69364247513879
1010	-0.0009900990099009901	0.692652376128889
10001	0.00009999000099990002	0.6931971730609582
10002	-0.00009998000399920016	0.6930971930569589
10003	0.00009997000899730081	0.6931971630659562
10004	-0.00009996001599360256	0.6930972030499627

10005	0.00009995002498750625	0.6931971530749502
10006	-0.00009994003597841295	0.6930972130389718
10007	0.000099930048965724	0.6931971430879375
10008	-0.00009992006394884092	0.6930972230239886
10009	0.00009991008092716555	0.6931971331049157
10010	-0.0000999000999000999	0.6930972330050156

Zum Vergleich: ln(2) = 0,6931471806…

www.michael-buhlmann.de / 12.2020 / Aufgabe 1237