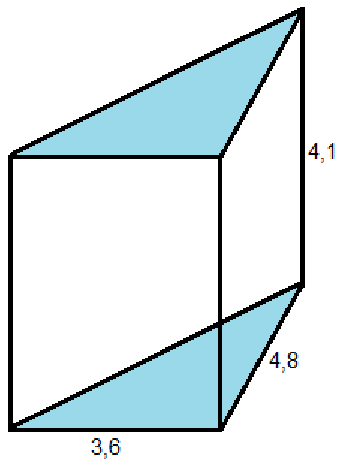
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Prisma

Aufgabe: Von einem Prisma mit rechtwinkligem Dreieck als Grundfläche sind bekannt: die Dreieckskatheten a, b die Prismenhöhe h (alle Längen in cm). Berechne Volumen und Oberflächeninhalt des Prismas.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$
$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

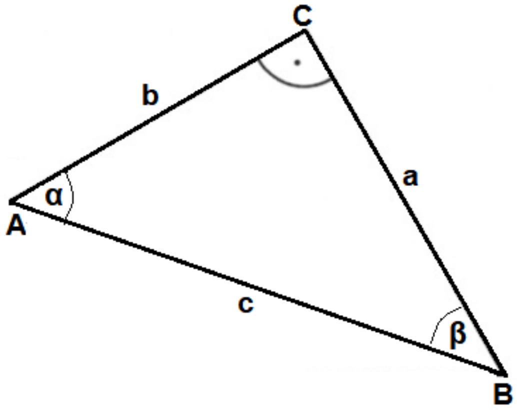
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

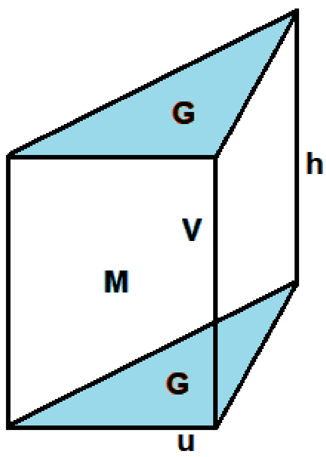
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$



II. Ein (gerades) Prisma (Winkel zwischen Grundfläche und Prismenhöhe: 90°) ist durch die Größen Grundflächenumfang u, Grundflächeninhalt G und Prismenhöhe h bestimmt. Daraus ergeben sich die Mantelfläche M, die Oberfläche O und das Volumen V des Prismas.



Prisma: Umfang u, Grundfläche G, Höhe h

Prisma

Umfang, Grundfläche, Prismenhöhe	u	G	h
Mantelfläche	$M = u \cdot h$	$u = \frac{M}{h}$	$h = \frac{M}{u}$
Oberfläche	$O = 2G + M$	$M = O - 2G$	$G = \frac{O-M}{2}$
Volumen	$V = G \cdot h$	$G = \frac{V}{h}$	$h = \frac{V}{G}$

III. Wir betrachten zunächst die Grundfläche des Prismas, ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten a = 3,6 cm, b = 4,8 cm. Gemäß dem Satz des Pythagoras gilt für die Hypotenuse im Dreieck:

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 3{,}6^2 + 4{,}8^2 = 36 \Rightarrow c = \sqrt{36} =$ 6 cm.

Demgemäß errechnet sich der Umfang der Grundfläche:

u = a + b + c = 3,6 + 4,8 + 6 = 14,4 cm.
der Grundflächeninhalt:

G = $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\cdot 3{,}6\cdot 4{,}8 =$ 8,64 cm^2.

IV. Aus dem Grundflächeninhalt G = 8,64 cm^2 und der Prismenhöhe h = 4,1 cm ergibt das Volumen des Prismas mit:
V = G·h = 8,64·4,1 = 35,424 ≈ 45,42 cm^3.

V. Aus dem Grundflächenumfang u = 14,4 cm und der Prismenhöhe h = 4,1 cm folgt für den Mantelflächeninhalt des Prismas:
M = u·h = 14,4·4,1 = 59,04 cm^2.

VI. Der Oberflächeninhalt des Prismas errechnet sich aus Grundflächen- und Mantelflächeninhalt gemäß:
O = 2G + M = 2·8,64 + 59,04 = 76,32 cm^2.

VII. Bezogen auf die Aufgabenstellung besitzt das Prisma einen Rauminhalt V = 45,42 cm^3, einen Oberflächeninhalt O = 76,32 cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 09.2023 / Aufgabe 1884