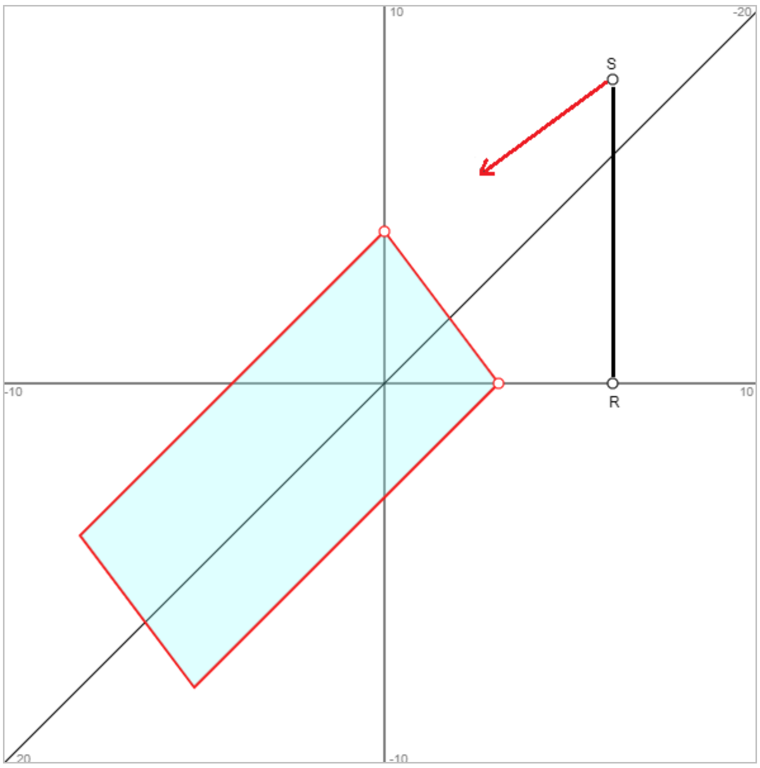
**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
## > Vektorrechnung
## > Projektion

---

**Aufgabe**: Die Ebene E: $4x_2 + 3x_3 = 12$ mit $x_3 \geq 0$ erhebt sich als Hang über der $x_1$-$x_2$-Grundebene. Vor dem Hang steht ein zur Grundebene senkrechter Mast im Punkt R(0|6|0) mit Mastspitze S(0|6|8). Die Sonne bescheint aus der Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ Mast, Grundebene und Hang. Wie lang ist der Schatten, den der Mast auf Hang und Grundebene wirft?

**Lösung**: I. Der Hang besitzt die Spurpunkte der Ebene E mit: $S_2$(0|3|0), $S_3$(0|0|4) (wegen der Division von der rechten Seite der Koordinatengleichung der Ebene durch die Koeffizienten vor $x_2$, $x_3$ auf der linken Seite, also: $S_2$(0|12:4|0), $S_3$(0|0|12:3)). Es ergibt sich die <u>Zeichnung</u>, an der wir uns im Folgenden orientieren:




II. Unter Berücksichtigung des Sonnenstrahlrichtungsvektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ erstellen wir die <u>Gerade</u> g durch die Mastspitze S(0|6|8). Dort, wo die Gerade die Ebene E schneidet, muss damit der Endpunkt des vom Mast verursachten Schattens auf der Ebene liegen. Die Gerade g errechnet sich als:

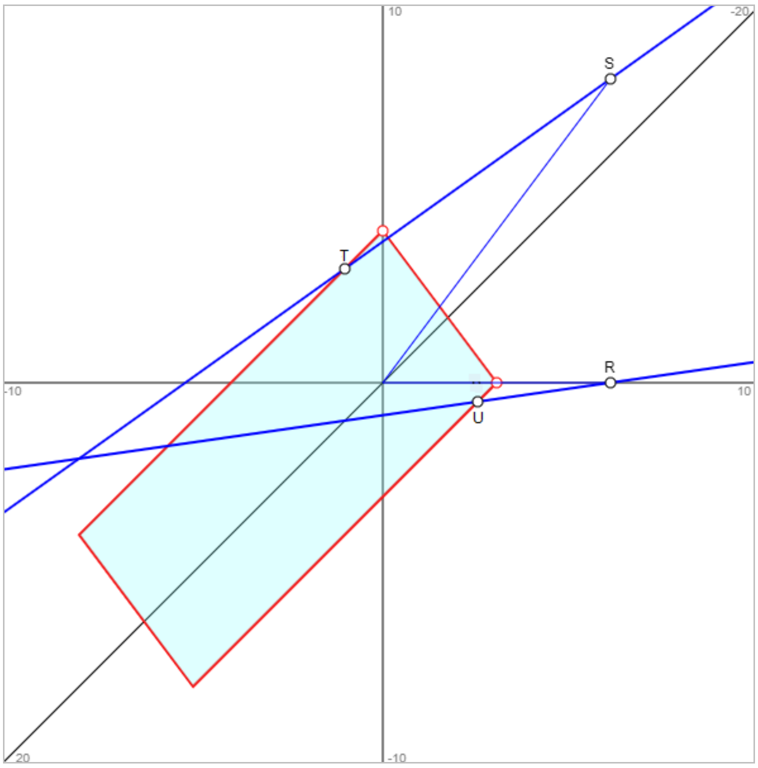
g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Die Gerade g schneidet die Ebene E im Punkt T vermöge der nachstehenden Berechnungen:

Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ => $x_1 = r$, $x_2 = 6 - 3r$, $x_3 = 8 - 2r$ -> Ebene E ->

$4(6\text{-}3r) + 3(8\text{-}2r) = 12 \Leftrightarrow 24\text{-}12r + 24\text{-}6r = 12 \Leftrightarrow 48 - 18r = 12 \Leftrightarrow -18r = -36 \Leftrightarrow r = 2$ ->

$\vec{OT} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ -> Schnittpunkt T(2|0|4).




III. Die <u>Gerade</u> h stellt sich als Projektion der Geraden g auf die $x_1$-$x_2$-Grundebene durch den Mastfußpunkt R(0|6|0) dar. Dort, wo die Gerade die Ebene E schneidet, muss damit der Anfangspunkt des vom Mast verursachten Schattens auf der Ebene liegen. Die Gerade h errechnet sich als:

h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(mit $x_3 = 0$). Die Gerade h schneidet die Ebene E im Punkt U vermöge der nachstehenden Berechnungen:

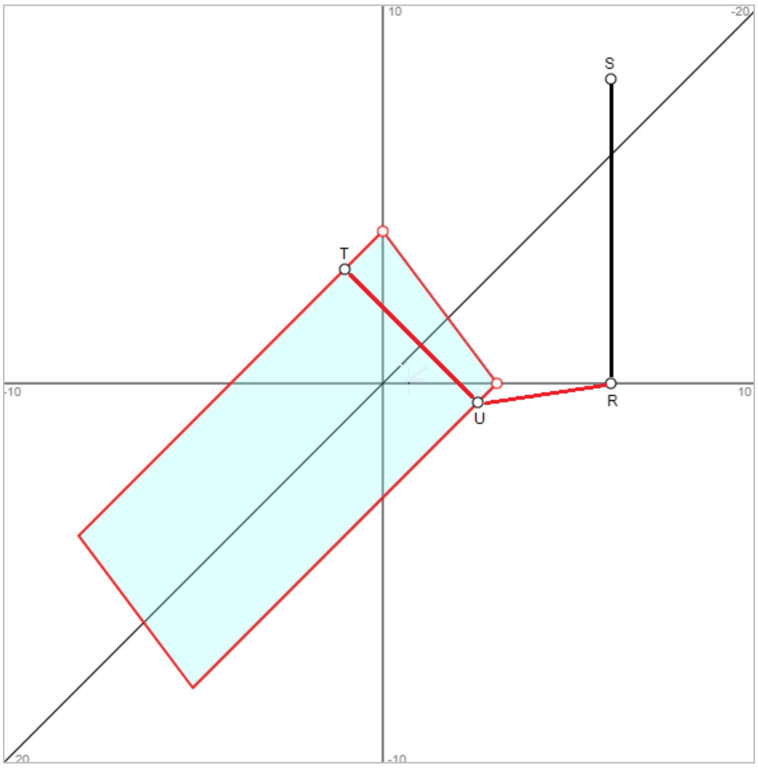
Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ => $x_1 = r$, $x_2 = 6 - 3s$, $x_3 = 0$ -> Ebene E ->

$4(6\text{-}3s) + 3 \cdot 0 = 12 \Leftrightarrow 24 - 12s = 12 \Leftrightarrow -12s = -12 \Leftrightarrow s = 1$ ->

$\vec{OU} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ -> Schnittpunkt U(1|3|0).

IV. Der Schatten, den der Mast auf Ebene E und $x_1$-$x_2$-Grundebene wirft, besteht aus den Strecken von R nach U und von U nach T. Folglich ist mit R(0|6|0), U(1|3|0), T(2|0|4) die Länge L des Schattens:

$$L = \left|\overrightarrow{RU}\right| + \left|\overrightarrow{UT}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 0^2} + \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 4^2} = \sqrt{10} + \sqrt{26} = 8{,}3 \text{ LE.}$$




V. Wir führen noch eine Plausibilitätsbetrachtung durch. Die Punkte R(0|6|0), S(0|6|8), U(1|3|0), T(2|0|4) liegen alle auf der Ebene F: $3x_1 + x_2 = 6$, die Gerade durch T und U ist die Schnittgerade der beiden Ebenen E und F, die Punkte T und U sind (hier) die Spurpunkte der Schnittgeraden mit der $x_1$-$x_3$- und der $x_1$-$x_2$-Grundebene.

(LE = Längeneinheiten)

www.michael-buhlmann.de / 06.2022 / Aufgabe 1652