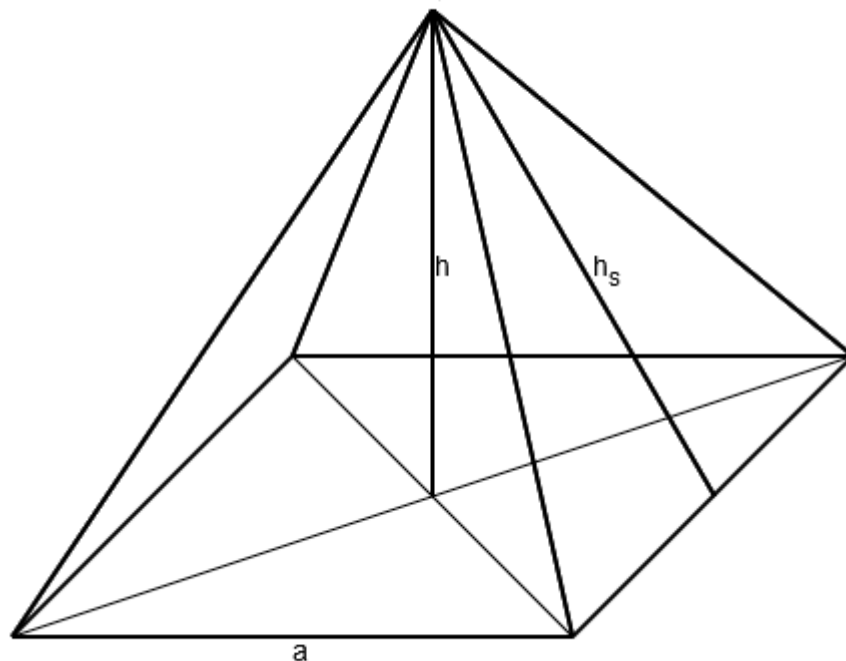


Mathematikaufgaben

> Geometrie/Körperberechnung

> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Eine quadratische Pyramide besitzt die Grundfläche $G = 125 \text{ cm}^2$ und einen drei Mal so großen Oberflächeninhalt M . Berechne das Pyramidenvolumen.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei $\gamma = 90^\circ$ heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a , bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b , bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{Hypotenuse})$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \quad (\text{Kathete})$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \quad (\text{Kathete})$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \alpha)$$

$$\sin \beta = \frac{b}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \cos \beta = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}, \quad \tan \beta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (\text{Winkel } \beta)$$

$$\sin \alpha = \cos \beta, \quad \cos \alpha = \sin \beta, \quad \tan \alpha = \frac{1}{\tan \beta}, \quad \tan \beta = \frac{1}{\tan \alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α , β und $\gamma = 90^\circ$ gelten noch die Beziehungen:

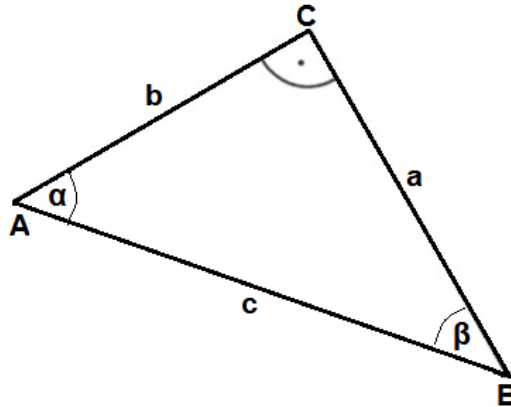
$$\alpha + \beta = 90^\circ, \alpha = 90^\circ - \beta, \beta = 90^\circ - \alpha.$$

Mit den Seiten a , b , c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

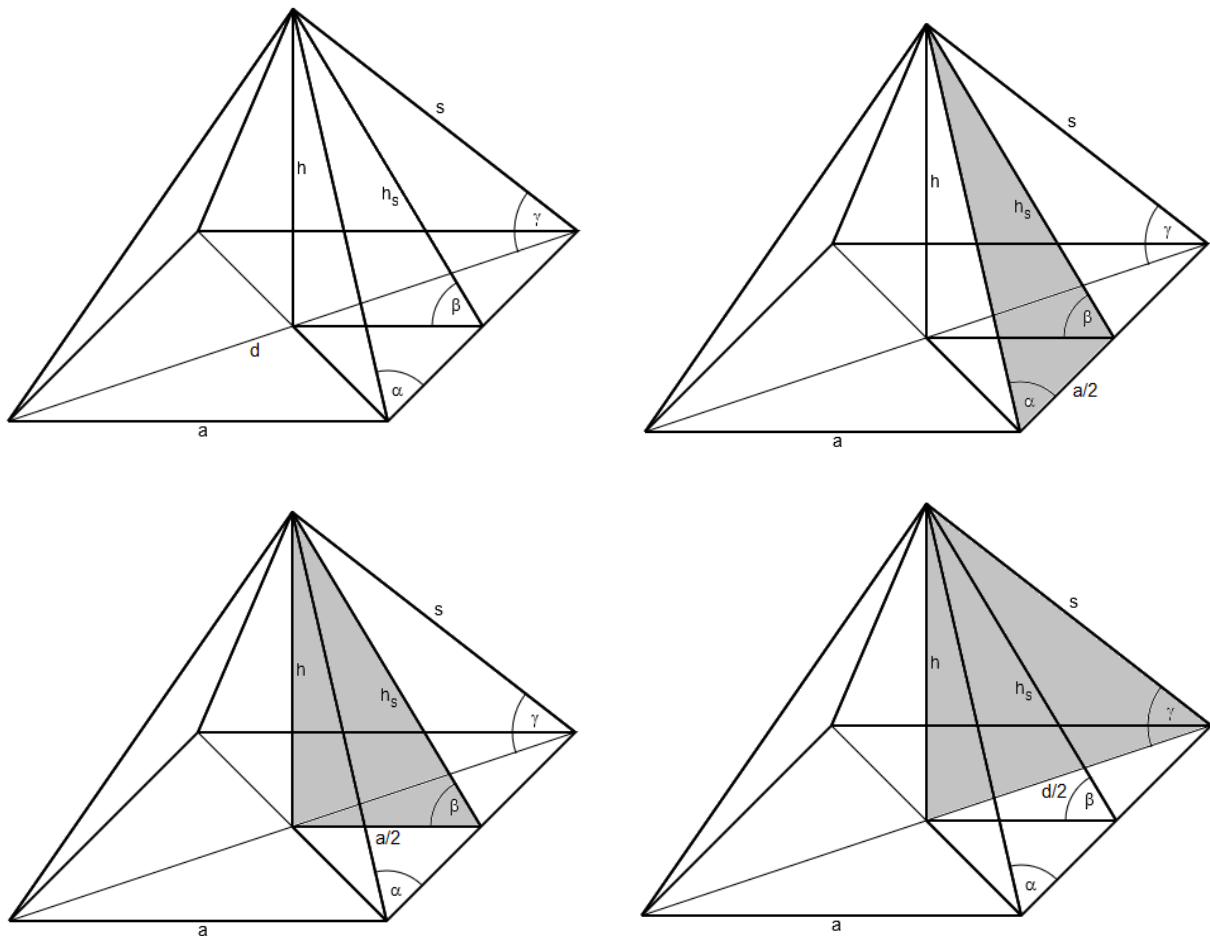
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a , b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2} ab.$$



II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s , die Kantenlänge s , die Oberfläche O , die Mantelfläche M , die Grundfläche G und das Volumen V .



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen- diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden- höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$		
Oberfläche	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- kante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan \beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund- fläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan \gamma = \frac{2h}{d}$

III. Die Grundfläche ist $G = 125 \text{ cm}^2$ groß, die Oberfläche $O = 375 \text{ cm}^2$, die Mantelfläche somit:
 $M = O - G = 375 - 125 = 250 \text{ cm}^2$.

IV. Mit $G = 125 \text{ cm}^2$ und wegen $G = a^2$ mit Grundkante a ergibt sich die Grundkantenlänge als:
 $a = \sqrt{G} = \sqrt{125} = 11,18 \text{ cm}$.

V. Aus der Größe der Mantelfläche $M = 250 \text{ cm}^2$ und der Grundkante $a = 11,18 \text{ cm}$ folgt wegen
 $M = 2ah_s$ für die Pyramidenseitenhöhe h_s :

$$h_s = \frac{M}{2a} = \frac{250}{2 \cdot 11,18} = 11,18 \text{ cm}.$$

VI. Im rechtwinkligen Paralleldreieck der Pyramide mit den Seiten $a/2$, h und h_s sind $a/2 = 5,59 \text{ cm}$
und $h_s = 11,18 \text{ cm}$ bekannt, so dass nach dem Satz des Pythagoras für die Pyramidenhöhe h folgt:

$$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 11,18^2 - 5,59^2 = 93,74 \Rightarrow h = \sqrt{93,74} = 9,68 \text{ cm}.$$

VII. Das Pyramidenvolumen errechnet sich aus Grundflächeninhalt $G = 125 \text{ cm}^2$ und Pyramiden-
höhe $h = 9,68 \text{ cm}$ als:

$$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 125 \cdot 9,68 = 403,33 \text{ cm}^3 \approx 403,3 \text{ cm}^3.$$