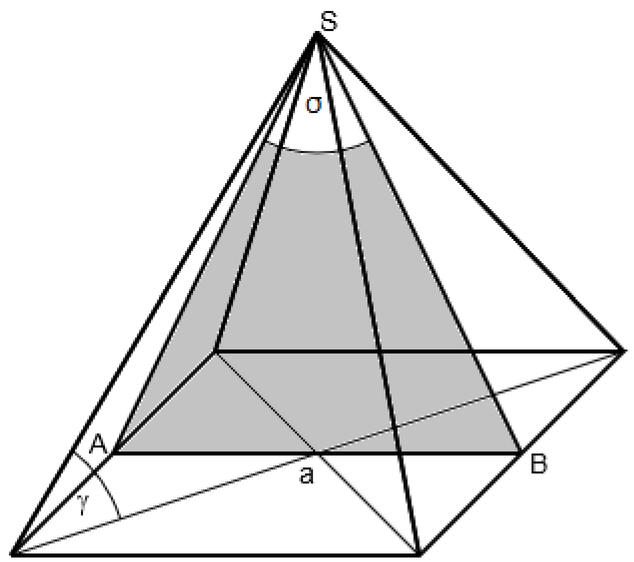
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Der Parallelschnitt einer quadratischen Pyramide ist das gleichschenklige Dreieck ΔABS mit Länge der Basis a = 6,8 cm und Winkel σ = 52° an der Spitze S. Berechne den Winkel γ zwischen Seitenkante und Grundfläche der Pyramide.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

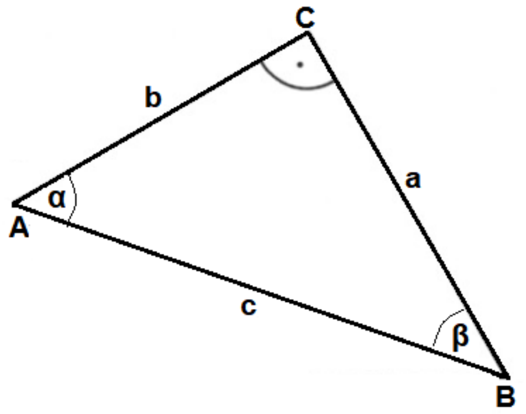
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

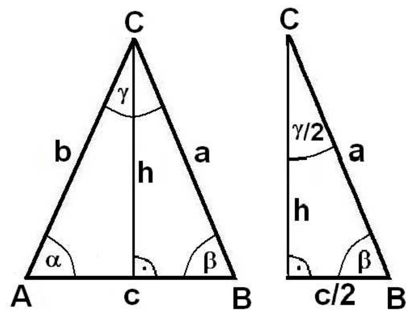
Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$

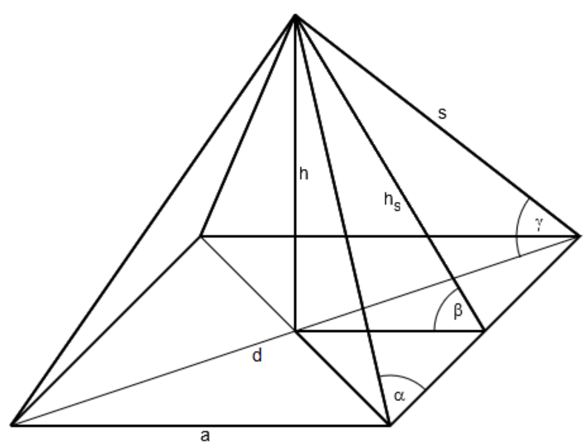


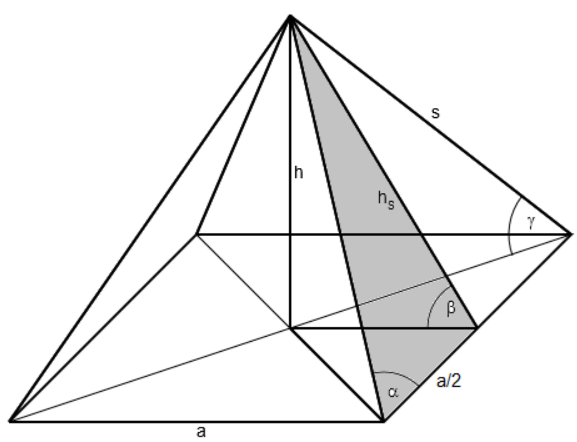
II. <u>Gleichschenklige Dreiecke</u> ΔABC sind Dreiecke mit zwei gleich langen Seiten haben, den Seiten a = b als Schenkeln, der Seite c als Grundseite (Basis) und den Winkeln $\alpha = \beta$ als Basiswinkeln, dem Winkel γ als Winkel in der Spitze. Für Dreieckshöhe h, Umfang u und Flächeninhalt A gilt:

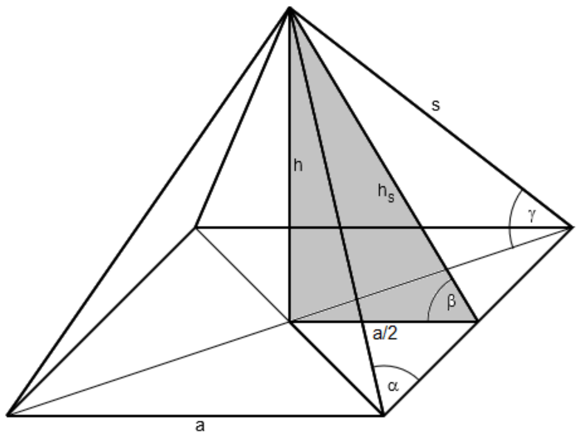
$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}\,,\ u = 2a + c,\ A = \frac{1}{2}ch\,.$$

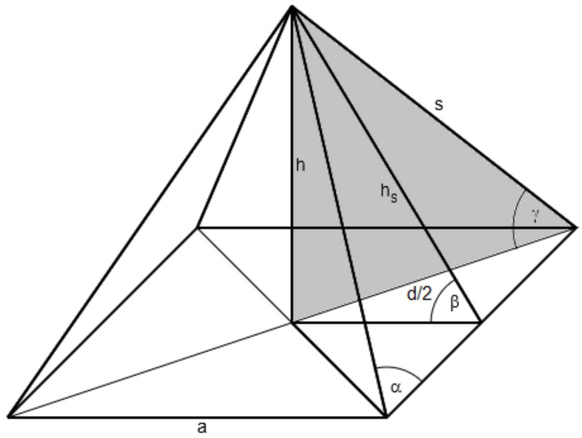


III. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.









Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide			
Grundfläche, Grundkante	$G=a^2$	$a=\sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d=a\sqrt{2}$	$a=\dfrac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2=h^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h^2=h_s^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=h_s^2-h^2$
Seitenkante	$s^2=h_s^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2=s^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=s^2-h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2=h^2+\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$	$h^2=s^2-\left(\dfrac{d}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{d}{2}\right)^2=s^2-h^2$
Mantelfläche	$M=2ah_s$	$h_s=\dfrac{M}{2a}$	$a=\dfrac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O=G+M=a^2+2ah_s=a(a+2h_s)$ $G=O-M$	$M=O-G$ $h_s=\dfrac{O-a^2}{2a}$	$a=-h_s+\sqrt{h_s^2+O}$
Volumen	$V=\dfrac{1}{3}G\cdot h=\dfrac{1}{3}a^2h$	$a=\sqrt{\dfrac{3V}{h}}$	$h=\dfrac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha=\dfrac{h_s}{s}$	$\cos\alpha=\dfrac{a}{2s}$	$\tan\alpha=\dfrac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta=\dfrac{h}{h_s}$	$\cos\beta=\dfrac{a}{2h_s}$	$\tan\beta=\dfrac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma=\dfrac{h}{s}$	$\cos\gamma=\dfrac{d}{2s}$	$\tan\gamma=\dfrac{2h}{d}$

IV. Im gleichschenkligen Dreieck ΔABS stellt wegen des Dreiecks als Parallelschnitt a = 6,8 cm die Pyramidengrundkante a dar. Wird das Dreieck entlang der Höhe der Basis geteilt, so entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke mit halben Winkel σ/2 = 26° und halber Basisseite a/2 = 3,4 cm. Jedes der rechtwinkligen Dreiecke besitzt die Seiten a/2, h und h_s. Die Pyramidenhöhe h errechnet sich dabei mit:

$$\tan(\frac{\sigma}{2}) = \frac{a/2}{h} \Rightarrow h = \frac{3{,}4}{\tan 26°}$$ = 6,97 cm,

die Seitenhöhe h_s der Pyramide als:

$$\sin(\frac{\sigma}{2}) = \frac{a/2}{h_s} \Rightarrow h_s = \frac{3{,}4}{\sin 26°}$$ = 7,76 cm.

V. Das rechtwinklige Diagonaldreieck mit den Seiten d/2, h und s enthält den gesuchten Winkel γ zwischen Grundfläche und Seitenkante. Da die Pyramidenhöhe h schon bekannt ist, bleibt, etwa mit der Seitenhöhe h_s = 7,76 cm und der halben Grundkante a/2 = 3,4 cm über das rechtwinklige Mantelflächendreieck mit den Seiten a/2, h_s und s vermöge des Satzes des Pythagoras die Pyramidenseitenkante auszurechnen. Es gilt:

$$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow s^2 = 7{,}76^2 + 3{,}4^2 = 71{,}78 \Rightarrow s = \sqrt{71{,}78}$$ = 8,47 cm.

VI. Der gesuchte Winkel γ errechnet sich auf Grund von Seitenkante s = 8,47 cm und Pyramidenhöhe h = 6,907 cm mit Hilfe des Sinus als Gegenkathete durch Hypotenuse:

$$\sin\gamma = \frac{h}{s} = \frac{6{,}97}{8{,}47} = 0{,}8229 \Rightarrow \gamma = \sin^{-1}(0{,}8229)$$ = 55,38° ≈ 55,4°.

www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 919