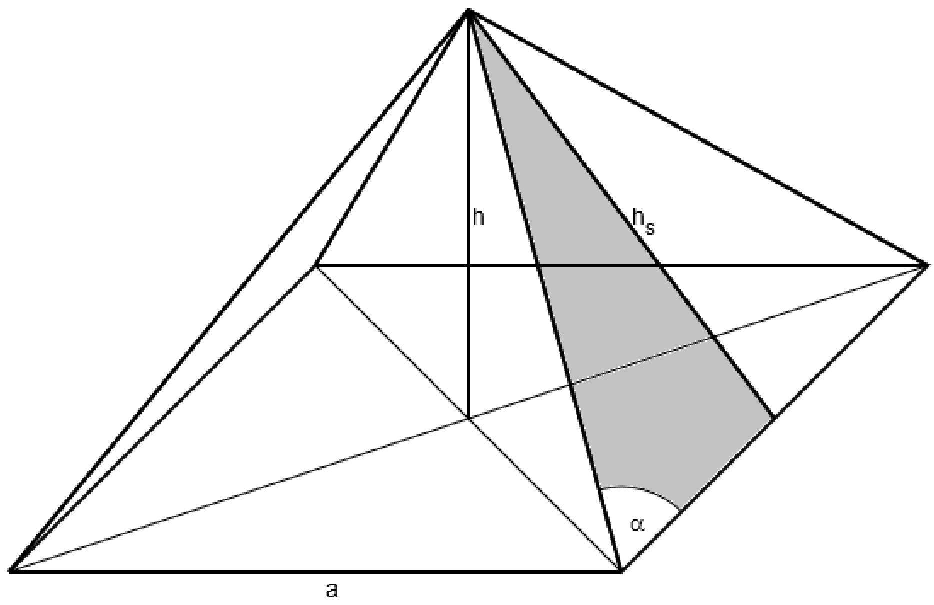
**Michael Buhlmann**

# Mathematikaufgaben
# > Geometrie/Körperberechnung
# > Quadratische Pyramide

---

**Aufgabe**: Bei einer quadratischen Pyramide ist die Mantelfläche M = 240 $cm^2$ groß, der Winkel zwischen Seiten- und Grundkante beträgt α = 59°. Berechne den Rauminhalt und Oberfläche der Pyramide.




**Lösung**: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

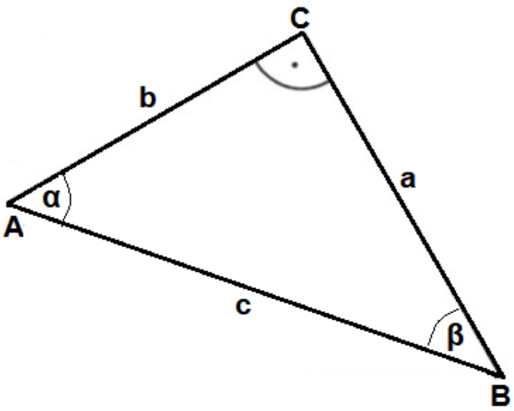
α + β = 90°, α = 90° – β, β = 90° – α.

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

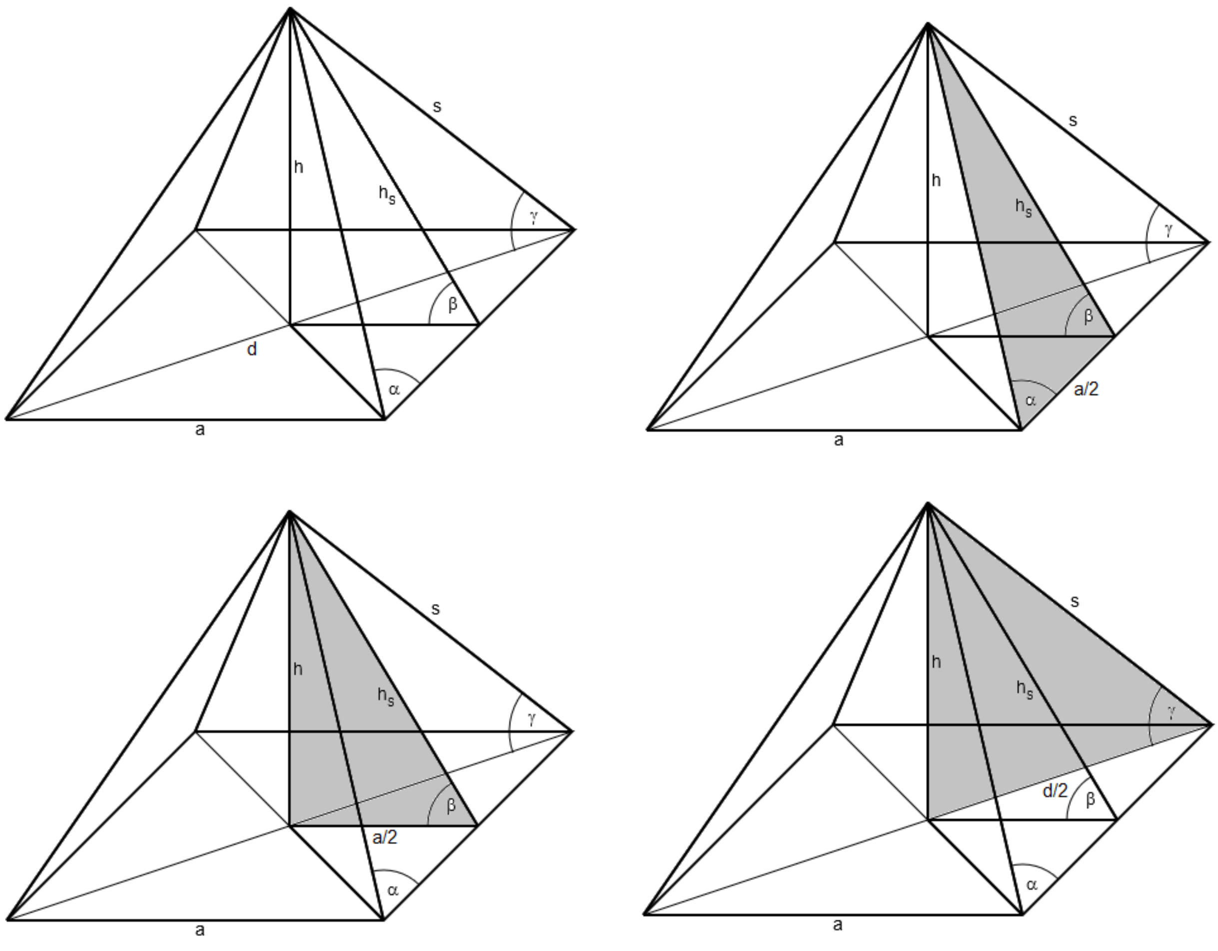
$$A = \frac{1}{2}ab\ .$$




Wegen $\tan\beta = \frac{b}{a} \Rightarrow b = a\tan\beta$ bzw. $\tan\alpha = \frac{a}{b} \Rightarrow a = b\tan\alpha$ gelten noch die Flächenformeln:

$$A = \frac{1}{2}a^2\tan\beta\ ,\ A = \frac{1}{2}b^2\tan\alpha\ .$$

II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe $h_s$, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.




Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

**Quadratische Pyramide**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Grundfläche, Grundkante | $G = a^2$ | $a = \sqrt{G}$ | |
| Grundflächen-diagonale | $d = a\sqrt{2}$ | $a = \frac{d}{\sqrt{2}}$ | |
| Seitenhöhe | $h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$ |
| Seitenkante | $s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ | $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$ |
| Pyramiden-höhe | $s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$ | $h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$ | $\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$ |
| Mantelfläche | $M = 2ah_s$ | $h_s = \frac{M}{2a}$ | $a = \frac{M}{2h_s}$ |
| Oberfläche | $O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$<br>$G = O - M$ | $M = O - G$<br>$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$ | $a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$ |
| Volumen | $V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$ | $a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$ | $h = \frac{3V}{a^2}$ |
| Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a | $\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$ | $\cos\alpha = \frac{a}{2s}$ | $\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$ |
| Winkel zwischen Seitenhöhe $h_s$ und Grundfläche G | $\sin\beta = \frac{h}{h_s}$ | $\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$ | $\tan\beta = \frac{2h}{a}$ |
| Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G | $\sin\gamma = \frac{h}{s}$ | $\cos\gamma = \frac{d}{2s}$ | $\tan\gamma = \frac{2h}{d}$ |

III. Wir betrachten das halbe rechtwinklige Mantelflächendreieck mit den Seiten a/2, $h_s$ und s. Die Fläche dieses Dreiecks ist A = M/8 = 240/8 = 30 cm² groß auf Grund der vorgegebenen Mantelfläche M = 240 cm². Mit dem ebenfalls vorgegebenen Winkel α = 59° und wegen A = $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot h_s$ bei:

$$\tan\alpha = \frac{h_s}{a/2} \Rightarrow h_s = \frac{a}{2}\tan\alpha$$

folgt für die Dreieckfläche: A = $\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\tan\alpha = \frac{a^2}{8}\tan\alpha$. Umstellen nach a ergibt:

$$A = \frac{a^2}{8}\tan\alpha \Rightarrow 8A = a^2\tan\alpha \Rightarrow a^2 = \frac{8A}{\tan\alpha} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{8A}{\tan\alpha}} = 2\sqrt{\frac{2A}{\tan\alpha}}$$

und damit wegen A = 30 cm²:

$a = 2\sqrt{\frac{2\cdot 30}{\tan(59°)}}$ = 12 cm.

als Länge der Pyramidengrundkante. Mit $h_s = \frac{a}{2}\tan\alpha$ folgt:

$$h_s = \frac{12}{2} \cdot \tan(59°)$$ = 10 cm

als Seitenhöhe der Pyramide. Wir bemerken noch, dass mit dem Mantelflächendreieckswinkel α und der Pyramidengrundkante a für den Inhalt der Mantelfläche M einer quadratischen Pyramide die allgemeine Formel gilt:

M = $a^2 \tan \alpha$.

IV. Mit der Grundkante a = 12 cm errechnet sich die Pyramidengrundfläche als G = $a^2$ = $12^2$ = 144 $cm^2$.

V. Grundkante a = 12 cm und Seitenhöhe $h_s$ = 10 cm ergeben noch im Paralleldreieck der Pyramide mit den Seiten a/2, h und $h_s$ die Pyramidenhöhe gemäß dem Satz des Pythagoras:

$$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 10^2 - 6^2 = 64 \Rightarrow h = \sqrt{64}$$ = 8 cm.

VI. Für das Pyramidenvolumen folgt wegen Grundfläche G = 144 $cm^2$ und Höhe h = 8 cm:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 144 \cdot 8$$ = 384 $cm^3$.

VII. Für die Pyramidenoberfläche gilt wegen der vorgegebenen Mantelfläche M = 240 $cm^2$ und der oben errechneten Grundfläche G = 144 $cm^2$:

O = G + M = 144 + 240 = 384 $cm^2$.

www.michael-buhlmann.de / 12.2019 / Aufgabe 920