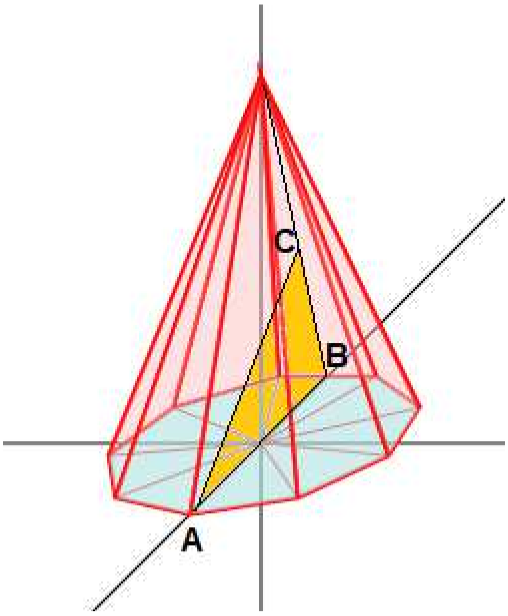
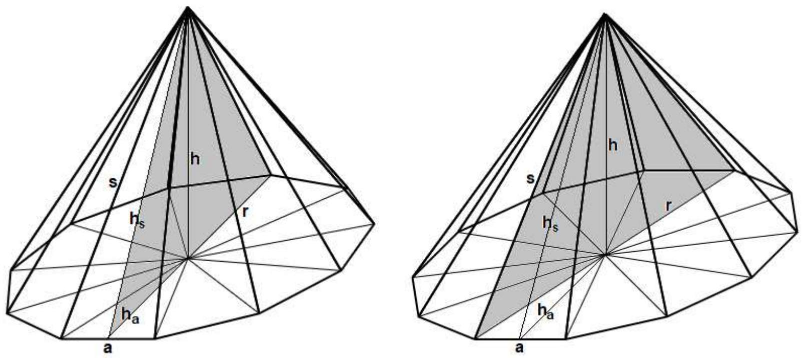
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Neuneckpyramide

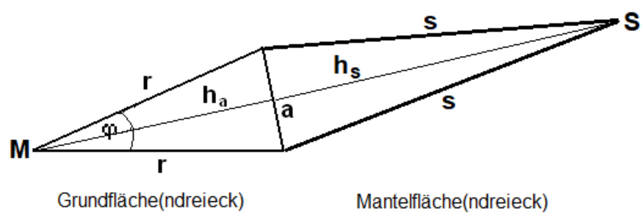
Aufgabe: Bei einer regelmäßigen Neuneckpyramide ist das Volumen V = 304,9 cm^3 groß, die Grundkante ist a = 3,4 cm lang. Innerhalb der Pyramide befindet sich das Dreieck ΔABC, die Ecke C liegt in der Mitte der Seitenhöhe h_s der Pyramide. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.



Lösung: I. Eine Pyramide mit einem regelmäßigen n-Eck als Grundfläche ist durch die Grundkantenlänge a, die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V. Die Grundfläche G besteht aus n gleichschenkligen Dreiecken mit Innenwinkel φ = 360°/n, Grundseite a, Schenkeln r und Höhe h_a.



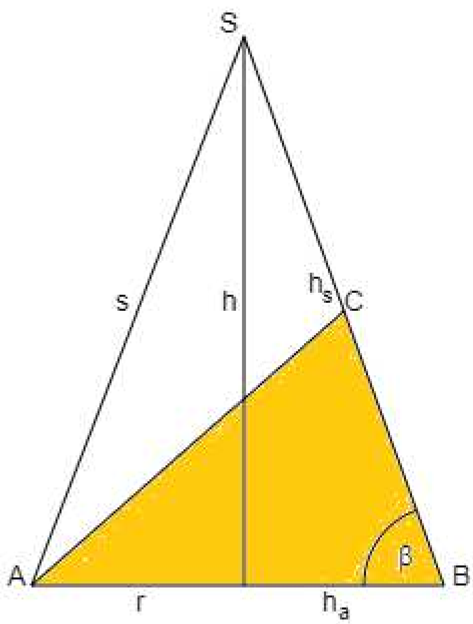
n-Eckpyramiden: n ungerade, n gerade



n-Eckpyramide

Dreieck: Halber Innenwinkel	$\frac{\varphi}{2}=\frac{180°}{n}$	$r=\frac{h_a}{\cos(\frac{\varphi}{2})}$	$h_a=r\cdot\cos(\frac{\varphi}{2})$
Dreieck: Schenkel, Höhe	$r^2=h_a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$r=\frac{a}{2\cdot\sin(\frac{\varphi}{2})}$	$h_a=\frac{a}{2\cdot\tan(\frac{\varphi}{2})}$
Grundfläche	$G=\frac{nah_a}{2}$	$h_a=\frac{2G}{na}$	$a=\frac{2G}{nh_a}$
Seitenhöhe	$h_s^2=h^2+h_a^2$	$h^2=h_s^2-h_a^2$	$h_a^2=h_s^2-h^2$
Seitenkante	$s^2=h_s^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2=s^2-h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2=h^2+r^2$	$h^2=s^2-r^2$	$r^2=s^2-h^2$
Mantelfläche	$M=\frac{n}{2}ah_s$	$h_s=\frac{2M}{na}$	$a=\frac{2M}{nh_s}$
Oberfläche	$O=G+M$	$G=O-M$	$M=O-G$
Volumen	$V=\frac{1}{3}G\cdot h$	$G=\frac{3V}{h}$	$h=\frac{3V}{G}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha=\frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha=\frac{a}{2s}$	$\tan\alpha=\frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta=\frac{h}{h_s}$	$\cos\beta=\frac{h_a}{h_s}$	$\tan\beta=\frac{h}{h_a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma=\frac{h}{s}$	$\cos\gamma=\frac{r}{s}$	$\tan\gamma=\frac{h}{r}$

II. Das Dreieck ΔABC ist ein allgemeines Dreieck, bestehend aus der gegenüber C liegenden Seite $c = r + h_a$, der gegenüber A liegenden Seite $a = h_s/2$ und dem Winkel β an der Ecke B. Das Dreieck ist Teil des Pyramidenquerschnittdreieck ΔABS mit S als Pyramidenspitze:



III. Mit Innenwinkel φ = 360°/9 = 40° und Grundkante a = 3,4 cm bestimmen wir in einem der neun gleichschenkligen Grundflächendreieck den <u>Radius</u> r des Neunecks und die <u>Höhe</u> h_a eines Grundflächendreiecks mit:

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{r} \Rightarrow r = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{3{,}4}{2}}{\sin 20°} = \frac{1{,}7}{\sin 20°} = 4{,}97 \approx 5 \text{ cm.}$$

$$\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{h_a} \Rightarrow h_a = \frac{\frac{a}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} = \frac{\frac{3{,}4}{2}}{\tan 20°} = \frac{1{,}7}{\tan 20°} = 4{,}67 \approx 4{,}7 \text{ cm.}$$

IV. Der Inhalt der <u>Grundfläche</u> der Neuneckpyramide ist dann:

G = $9\cdot\frac{1}{2}ah_a = 9\cdot\frac{1}{2}\cdot 3{,}4\cdot 4{,}7 = 71{,}91 \approx 71{,}9$ cm^2.

V. Aus der Volumenformel V = Gh/3 folgt mit V = 304,9 cm^3 für die <u>Pyramidenhöhe</u>:

$$V = \frac{1}{3}Gh \Rightarrow h = \frac{3V}{G} = \frac{3\cdot 304{,}9}{71{,}91} = 12{,}72 \approx 12{,}7 \text{ cm.}$$

VI. Mit Grundflächenhöhe h_a und Pyramidenhohe h folgt für die <u>Seitenhöhe</u> h_s der Pyramide nach dem Satz des Pythagoras:

$$h_s^2 = h^2 + h_a^2 \Rightarrow h_s^2 = 12{,}72^2 + 4{,}67^2 = 183{,}61 \Rightarrow h_s = \sqrt{183{,}61} = 13{,}55 \approx 13{,}6 \text{ cm.}$$

VII. Wir betrachten nun wieder das Dreieck ΔABC. Die <u>Seite</u> c = $\overline{AB}$ errechnet sich als:
c = r + h_a = 4,97 + 4,67 = 9,64 ≈ 9,6 cm.

Die <u>Seite</u> a = $\overline{BC}$ ist, da der Punkt C Mitte der Seitenhöhe h_s ist:

a = $\frac{h_s}{2} = \frac{13{,}6}{2} =$ 6,8 cm.

Der Winkel β bestimmt sich im Dreieck der Höhen h, h_a und h_s z.B. mit Hilfe des Tangens:

$$\tan\beta = \frac{h}{h_a} = \frac{12{,}72}{4{,}67} = 2{,}72 \Rightarrow \beta = 69{,}84° \approx 69{,}8°.$$

VIII. Wir können nun den <u>Flächeninhalt</u> des Dreiecks ΔABC ausrechnen, indem wir die Flächenformel $A_\Delta = \frac{1}{2}ac\sin\beta$ verwenden. Es ergibt sich:

$A_\Delta = \frac{1}{2}\cdot 6{,}8\cdot 9{,}6\cdot\sin 69{,}8° = 30{,}63 \approx 30{,}6$ cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 01.2021 / Aufgabe 1258