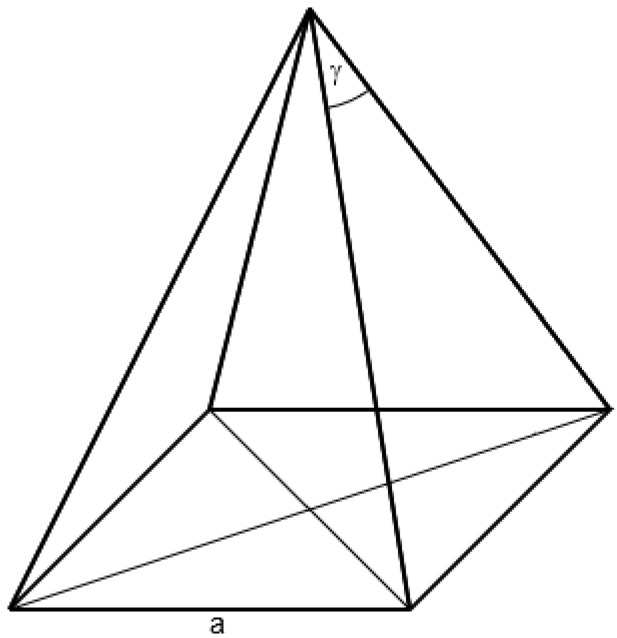
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: die Grundkante a = 14,4 cm, der Winkel eines Mantelflächendreiecks an der Pyramidenspitze γ = 45,2°. Berechne Oberflächeninhalt und Volumen der Pyramide.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta,\ \cos\alpha = \sin\beta,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta},\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

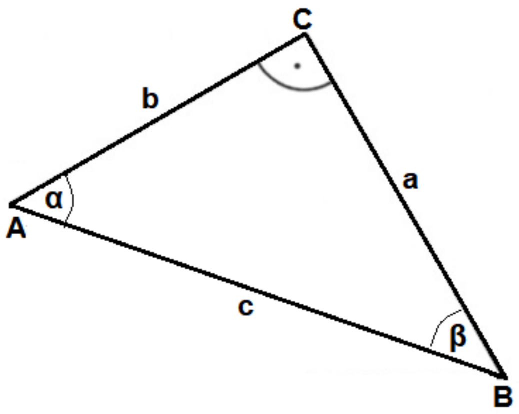
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

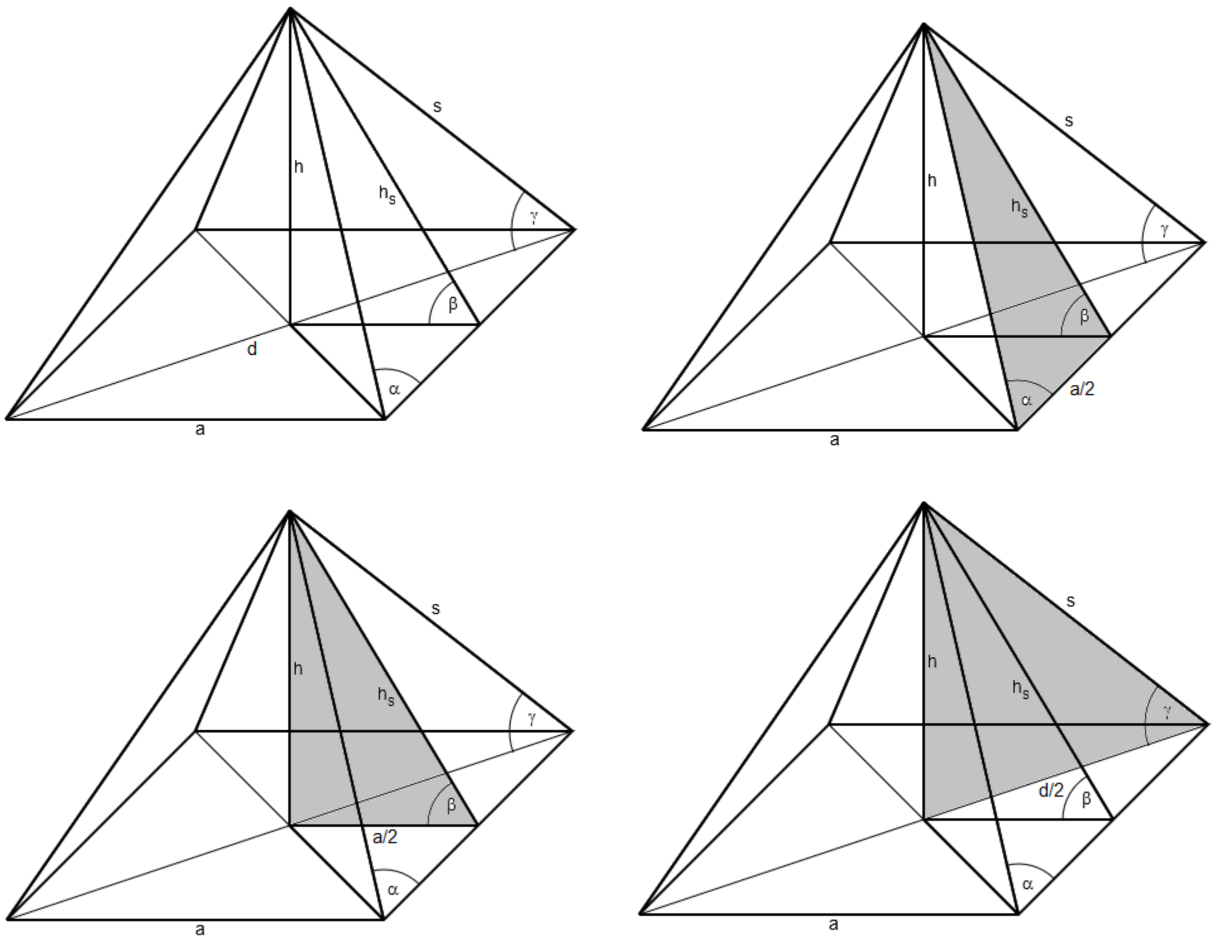
$$u = a + b + c.$$

Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$



II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen <u>quadratischen Pyramide</u> gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G=a^2$	$a=\sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d=a\sqrt{2}$	$a=\frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2=h_s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2=h_s^2-h^2$
Seitenkante	$s^2=h_s^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2=s^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2=s^2-h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2=h^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2=s^2-\left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2=s^2-h^2$
Mantelfläche	$M=2ah_s$	$h_s=\frac{M}{2a}$	$a=\frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O=G+M=a^2+2ah_s=a(a+2h_s)$		
	$G=O-M$	$M=O-G$	
		$h_s=\frac{O-a^2}{2a}$	$a=-h_s+\sqrt{h_s^2+O}$
Volumen	$V=\frac{1}{3}G\cdot h=\frac{1}{3}a^2h$	$a=\sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h=\frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha=\frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha=\frac{a}{2s}$	$\tan\alpha=\frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta=\frac{h}{h_s}$	$\cos\beta=\frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta=\frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma=\frac{h}{s}$	$\cos\gamma=\frac{d}{2s}$	$\tan\gamma=\frac{2h}{d}$

III. Wir benötigen zur Berechnung des Oberflächeninhalts der Pyramide laut Formel:

$$O=a^2+2ah_s$$

die Seitenhöhe h_s, zur Volumenberechnung gemäß:

$$V=\frac{1}{3}a^2h$$

die Pyramidenhöhe h.

IV. Im gleichschenkligen Mantelflächendreieck ist der Winkel an der Spitze γ = 45,2° groß, die Grundkante ist a = 14,4 cm lang. Die Halbierung des Dreiecks führt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel γ/2 = 45,2°:2 = 22,6° und Gegenkathete a/2 = 14,4:2 = 7,2 cm. Solch ein rechtwinkliges Dreieck wird außerdem durch die Seitenhöhe h_s als Ankathete und die Seitenkante s als Hypotenuse begrenzt. Wir berechnen die Seitenhöhe h_s mit Hilfe des Tangens:

$$\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)=\frac{\frac{a}{2}}{h_s}\Rightarrow\tan 22{,}6°=\frac{7{,}2}{h_s}\Rightarrow h_s=\frac{7{,}2}{\sin 22{,}6°}$$ = 17,30 cm.

V. Nach dem Satz des Pythagoras $h_s^2=h^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2$ lässt sich die Pyramidenhöhe h berechnen als:

$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 17{,}3^2 - 7{,}2^2 = 247{,}45 \Rightarrow h = \sqrt{247{,}45}$ = 15,73 cm.

VI. Für den Oberflächeninhalt der Pyramide ergibt sich damit:

$O = 14{,}4^2 + 2 \cdot 14{,}4 \cdot 17{,}3 =$ 705,6 cm^2.

VII. Für den Rauminhalt der Pyramide folgt:

$V = \frac{1}{3} \cdot 14{,}4^2 \cdot 15{,}73$ = 1087,3 cm^3.

www.michael-buhlmann.de / 10.2021 / Aufgabe 1510