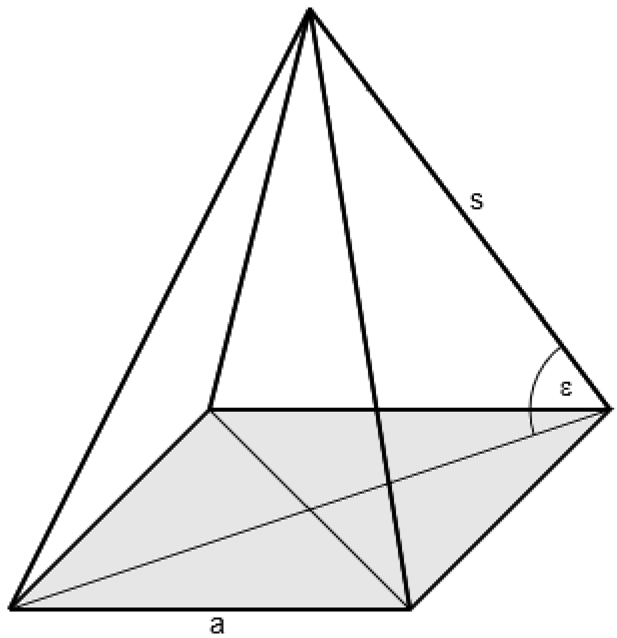
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind gegeben: die Grundkante a = 10,6 cm, der Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche ε = 62,1°. Berechne den Inhalt der Pyramidenoberfläche.



Lösung: I. Auch innerhalb der Körperberechnung spielen ebene rechtwinklige Dreiecke eine wichtige Rolle. In einem <u>rechtwinkligen Dreieck</u> ΔABC mit den Seiten a, b, c und den Winkeln α, β, γ bei γ = 90° heißen a und b Katheten, c Hypotenuse. Die Kathete, die gegenüber einem Winkel α oder β liegt, heißt Gegenkathete (bei Winkel α Seite a, bei Winkel β Seite b), die Kathete, die an einem Winkel α oder β liegt, heißt Ankathete (bei Winkel α Seite b, bei Winkel β Seite a). Dann gelten der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ (Hypotenuse)}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2} \text{ (Kathete)}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Kathete)}$$

und die trigonometrischen Beziehungen (Sinus, Kosinus, Tangens):

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\alpha = \frac{a}{b} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel α)}$$
$$\sin\beta = \frac{b}{c} = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse},\ \cos\beta = \frac{a}{c} = \frac{Ankathete}{Hypotenuse},\ \tan\beta = \frac{b}{a} = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} \text{ (Winkel β)}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta\,,\ \cos\alpha = \sin\beta\,,\ \tan\alpha = \frac{1}{\tan\beta}\,,\ \tan\beta = \frac{1}{\tan\alpha}\,.$$

Mit den Dreieckswinkeln α, β und γ = 90° gelten noch die Beziehungen:

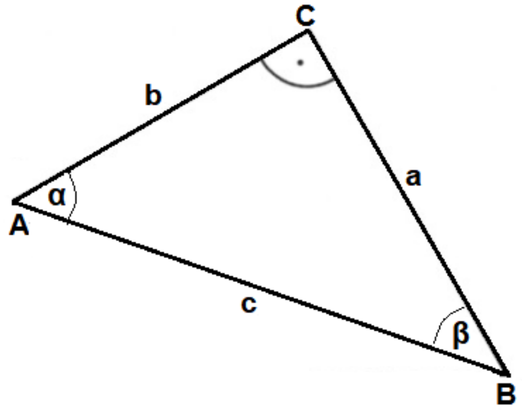
$$\alpha + \beta = 90°,\ \alpha = 90° - \beta,\ \beta = 90° - \alpha.$$

Mit den Seiten a, b, c des Dreiecks errechnet sich dessen Umfang:

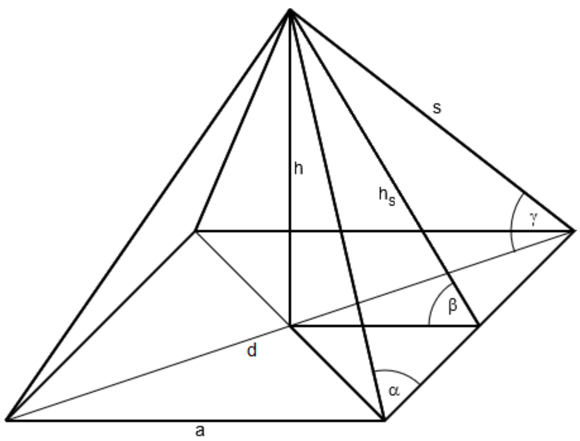
$$u = a + b + c.$$

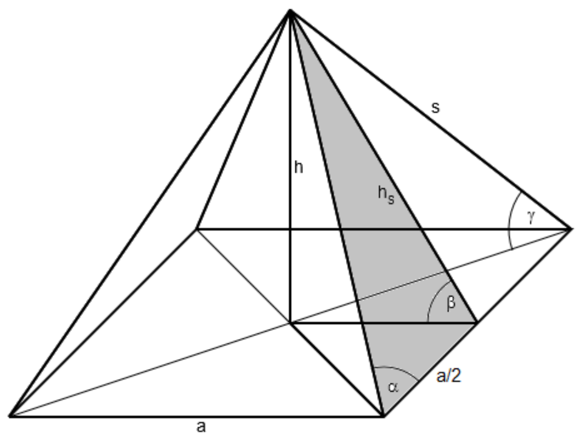
Mit den Katheten a, b ermittelt sich der Flächeninhalt der Dreiecksfläche:

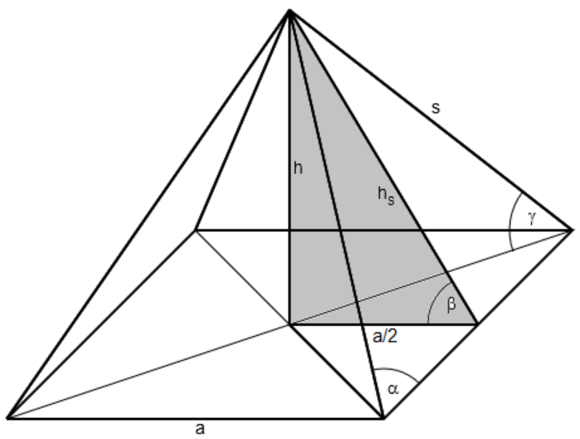
$$A = \frac{1}{2}ab\,.$$

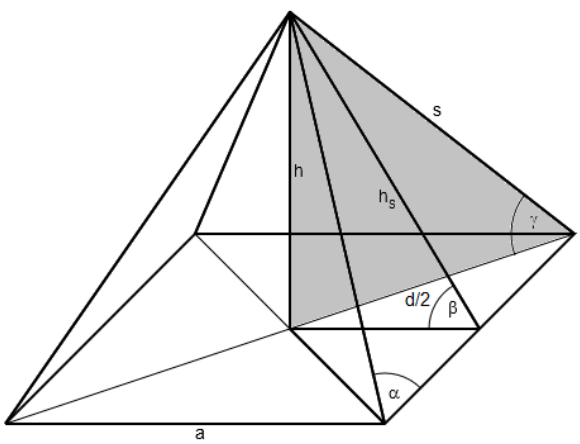


II. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.









In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramiden-höhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-kante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grund-fläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

III. III. Wir benötigen zur Berechnung des Oberflächeninhalts der Pyramide laut Formel:

$$O = a^2 + 2ah_s$$

die Seitenhöhe h_s. Das rechtwinklige Diagonaldreieck der quadratischen Pyramide mit Winkel ε = 62,1° besteht aus der Seitenkante s als Hypotenuse sowie der Höhe h und der halben Grundflächendiagonale d/2 als Katheten. Weder Hypotenuse noch Katheten sind zunächst bekannt.

IV. Im Quadrat der Grundfläche lässt sich dann die Grundflächendiagonale $d = a\sqrt{2}$ als

$d = 10{,}6\sqrt{2}$ = 15 cm

berechnen. Die halbe Grundflächendiagonale ist dann:

d/2 = 15:2 = 7,5 cm

groß.

V. Im Diagonaldreieck kann nun mit der halben Grundflächendiagonale d/2 und dem Winkel ε = 62,1° die Pyramidenhöhe h errechnet werden:

$\tan\varepsilon = \frac{h}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \tan 62{,}1° = \frac{h}{7{,}5} \Rightarrow h = 7{,}5 \cdot \tan 62{,}1°$ = 14,17 cm.

VI. Im rechtwinkligen <u>Paralleldreieck</u> aus Hypotenuse h_s als Seitenhöhe und Katheten a/2 als halbe Grundkante und h als Höhe gilt nach dem Satz des Pythagoras für die <u>Seitenhöhe</u> h_s:

$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 14{,}17^2 + \left(\frac{10{,}6}{2}\right)^2 = 14{,}17^2 + 5{,}3^2 = 228{,}88 \Rightarrow h_s = \sqrt{228{,}88}$ = 15,13 cm.

VII. Wir können jetzt den <u>Oberflächeninhalt</u> der Pyramiden bestimmen. Es ist:

$O = 10{,}6^2 + 2 \cdot 10{,}6 \cdot 15{,}13 =$ 433,1 cm^2.

www.michael-buhlmann.de / 10.2021 / Aufgabe 1511