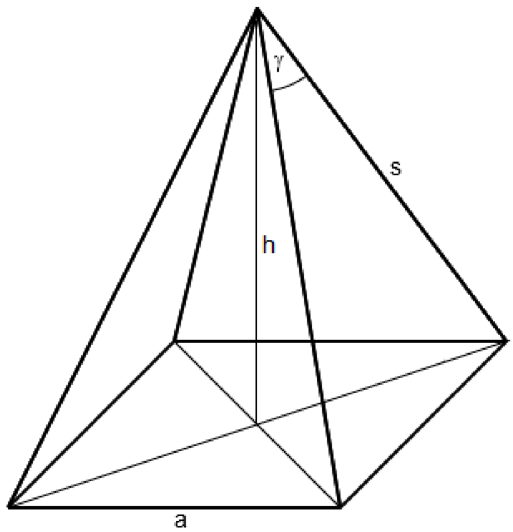
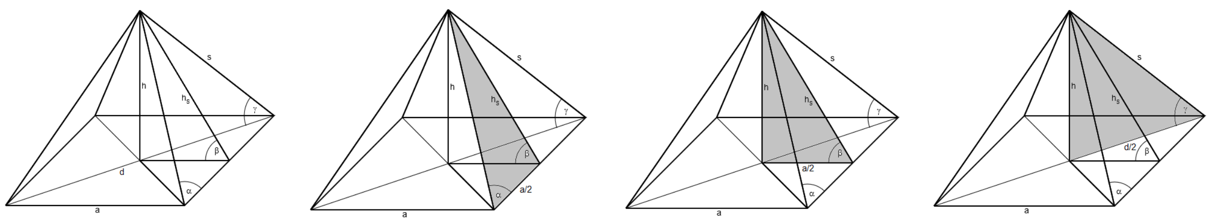
Michael Buhlmann

Mathematikaufgaben
> Geometrie/Körperberechnung
> Quadratische Pyramide

Aufgabe: Von einer quadratischen Pyramide sind bekannt: die Seitenkante s = 11,6 cm, der Winkel eines Mantelflächendreiecks γ = 40,8°. Berechne den Rauminhalt der Pyramide.



Lösung: I. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s, die Kantenlänge s, die Oberfläche O, die Mantelfläche M, die Grundfläche G und das Volumen V.



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen-diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$
Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\dfrac{a}{2}\right)^2$	$\left(\dfrac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$

Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
Oberfläche	$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$ $G = O - M$	$M = O - G$ $h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} a^2 h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin\alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos\alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan\alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin\beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos\beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan\beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin\gamma = \frac{h}{s}$	$\cos\gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan\gamma = \frac{2h}{d}$

II. Im gleichschenkligen Mantelflächendreieck ist der Winkel an der Spitze γ = 40,2° groß, die Seitenkante ist s = 11,6 cm lang. Die Halbierung des Dreiecks führt auf zwei rechtwinklige Dreiecke mit Winkel γ/2 = 40,2°:2 = 20,2° und Hypotenuse s. Solch ein rechtwinkliges Dreieck wird außerdem durch die Seitenhöhe h_s als Ankathete und die halbe Grundkante a/2 als Gegenkathete begrenzt. Wir berechnen die Seitenhöhe h_s mit Hilfe des Kosinus, die Grundkante a mit Hilfe des Sinus:

$$\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{h_s}{s} \Rightarrow \cos 20{,}2° = \frac{h_s}{11{,}6} \Rightarrow h_s = 11{,}6 \cos 20{,}2° = 10{,}89 \text{ cm}$$

$$\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\frac{a}{2}}{s} \Rightarrow \sin 20{,}2° = \frac{\frac{a}{2}}{11{,}6} \Rightarrow \frac{a}{2} = 11{,}6 \sin 20{,}2° = 4 \text{ cm} \Rightarrow a = 8 \text{ cm.}$$

III. Die Grundfläche G der Pyramide ist ein Quadrat mit Grundkantenlänge a = 8 cm, also: $G = 8^2 = 64\ \text{cm}^2$.

IV. Wir betrachten das rechtwinklige Paralleldreieck in der Pyramide, das durch die Seitenhöhe h_s = 10,89 cm, die halbe Grundkante a/2 = 4 cm und die Pyramidenhöhe h begrenzt wird. Wir berechnen nach dem Satz des Pythagoras die Pyramidenhöhe h:

$$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow h^2 = 10{,}89^2 - 4^2 = 102{,}52 \Rightarrow h = \sqrt{102{,}52} = 10{,}13 \text{ cm.}$$

V. Das Volumen der Pyramide bestimmt sich schließlich als:

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h \Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 16 \cdot 10{,}13 = 54{,}03 \approx 54{,}0 \text{ cm}^3.$$

www.michael-buhlmann.de / 11.2024 / Aufgabe 2266