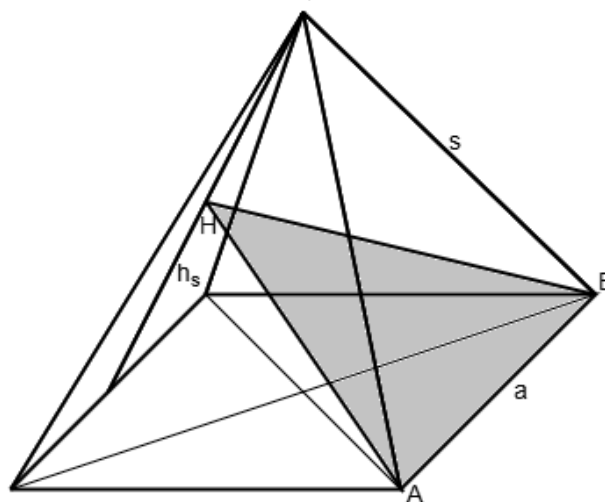


Mathematikaufgaben

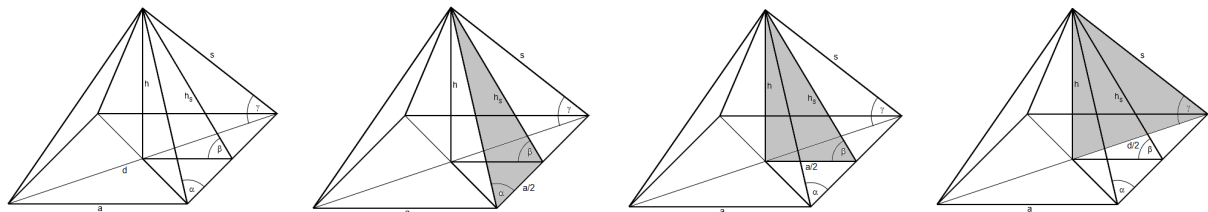
> Geometrie/Körperberechnung

> Quadratische Pyramide

Aufgabe: In einer quadratischen Pyramide ist die Grundkante $a = 14,8 \text{ cm}$ und die Seitenkante $s = 17,2 \text{ cm}$ lang. Gegenüber den Grundflächenecken A und B befindet sich der Punkt H, der die Seitenhöhe h_s in der Mitte teilt. Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABH.



Lösung: I. Eine Pyramide mit quadratischer Grundfläche ist durch die Seitenlänge a des Quadrats und durch die Pyramidenhöhe h bestimmt, weiter durch die Seitenhöhe h_s , die Kantenlänge s , die Oberfläche O , die Mantelfläche M , die Grundfläche G und das Volumen V .



Quadratische Pyramide, rechtwinklige Dreiecke in Pyramide

In einer regelmäßigen quadratischen Pyramide gelten dann die folgenden Beziehungen:

Quadratische Pyramide

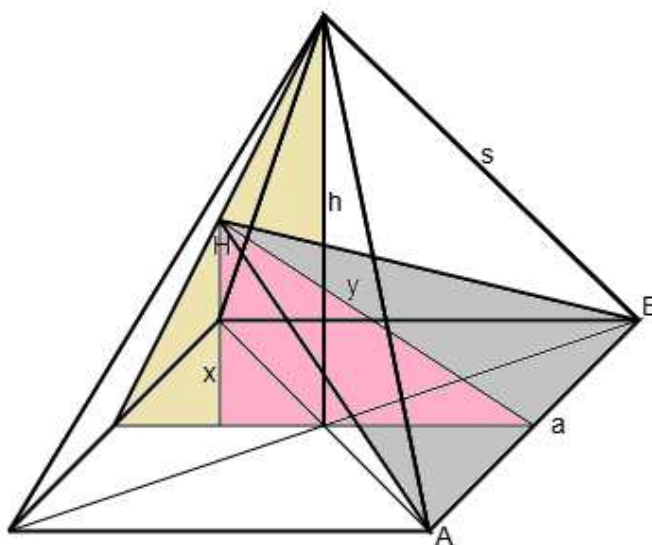
Grundfläche, Grundkante	$G = a^2$	$a = \sqrt{G}$	
Grundflächen- diagonale	$d = a\sqrt{2}$	$a = \frac{d}{\sqrt{2}}$	
Seitenhöhe	$h_s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h^2 = h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_s^2 - h^2$

Seitenkante	$s^2 = h_s^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$h_s^2 = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$	$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2 - h_s^2$
Pyramidenhöhe	$s^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$h^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2$	$\left(\frac{d}{2}\right)^2 = s^2 - h^2$
Mantelfläche	$M = 2ah_s$	$h_s = \frac{M}{2a}$	$a = \frac{M}{2h_s}$
$O = G + M = a^2 + 2ah_s = a(a + 2h_s)$			
Oberfläche	$G = O - M$	$M = O - G$	
		$h_s = \frac{O - a^2}{2a}$	$a = -h_s + \sqrt{h_s^2 + O}$
Volumen	$V = \frac{1}{3}G \cdot h = \frac{1}{3}a^2h$	$a = \sqrt{\frac{3V}{h}}$	$h = \frac{3V}{a^2}$
Winkel zwischen Kante s und Grundkante a	$\sin \alpha = \frac{h_s}{s}$	$\cos \alpha = \frac{a}{2s}$	$\tan \alpha = \frac{2h_s}{a}$
Winkel zwischen Seitenhöhe h_s und Grundfläche G	$\sin \beta = \frac{h}{h_s}$	$\cos \beta = \frac{a}{2h_s}$	$\tan \beta = \frac{2h}{a}$
Winkel zwischen Kante s und Grundfläche G	$\sin \gamma = \frac{h}{s}$	$\cos \gamma = \frac{d}{2s}$	$\tan \gamma = \frac{2h}{d}$

II. Die Grundkante $a = 14,8$ cm und die Seitenkante $s = 17,2$ cm der quadratischen Pyramide führen auf die Seitenhöhe und die Höhe des Körpers vermöge des Satzes des Pythagoras. Es gilt:

$$h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow h_s = \sqrt{17,2^2 - \left(\frac{14,8}{2}\right)^2} = \sqrt{17,2^2 - 7,4^2} = \sqrt{241,08} = 15,53 \text{ cm},$$

$$h = \sqrt{h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow h = \sqrt{15,53^2 - \left(\frac{14,8}{2}\right)^2} = \sqrt{15,53^2 - 7,4^2} = \sqrt{186,42} = 13,65 \text{ cm}.$$



III. Im rechtwinkligen Dreieck der Katheten $a/2$ und h sowie der Hypotenuse h_s befindet sich die zu

h parallele Strecke x, die vom Punkt H ausgehend senkrecht auf der Pyramidengrundfläche steht. Im Dreieck gilt mit Strahl h_s und den Parallelen x und h der 2. Strahlensatz (von der Mitte der Grundkante aus gesehen):

$$\frac{h_s}{h} = \frac{x}{h} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{h} \Rightarrow x = \frac{1}{2}h = \frac{1}{2} \cdot 13,65 = 6,83 \text{ cm.}$$

IV. Nach dem 1. Strahlensatz teilt (von der Mitte der Grundkante aus gesehen) die Parallele x den 2. Strahl $a/2$ in die Abschnitte $a/4$ und $a/4 = 3,7 \text{ cm}$.

V. Betrachtet wird nun das rechtwinklige Dreieck mit den Katheten $x = 6,83 \text{ cm}$ und $a/2 + a/4 = 3a/4 = 11,1 \text{ cm}$. Die Hypotenuse y im Dreieck errechnet sich nach dem Satz des Pythagoras:

$$y = \sqrt{x^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} \Rightarrow y = \sqrt{6,83^2 + 11,1^2} = \sqrt{169,86} = 13,03 \text{ cm.}$$

VI. Der gesuchte Flächeninhalt des Dreiecks ABH ergibt sich wegen $a = 14,8 \text{ cm}$ als Grundseite und $y = 13,03 \text{ cm}$ als Höhe des Dreiecks:

$$A_{ABH} = \frac{1}{2}ay = \frac{1}{2} \cdot 14,8 \cdot 13,03 = 96,42 \text{ cm}^2.$$