Michael Buhlmann

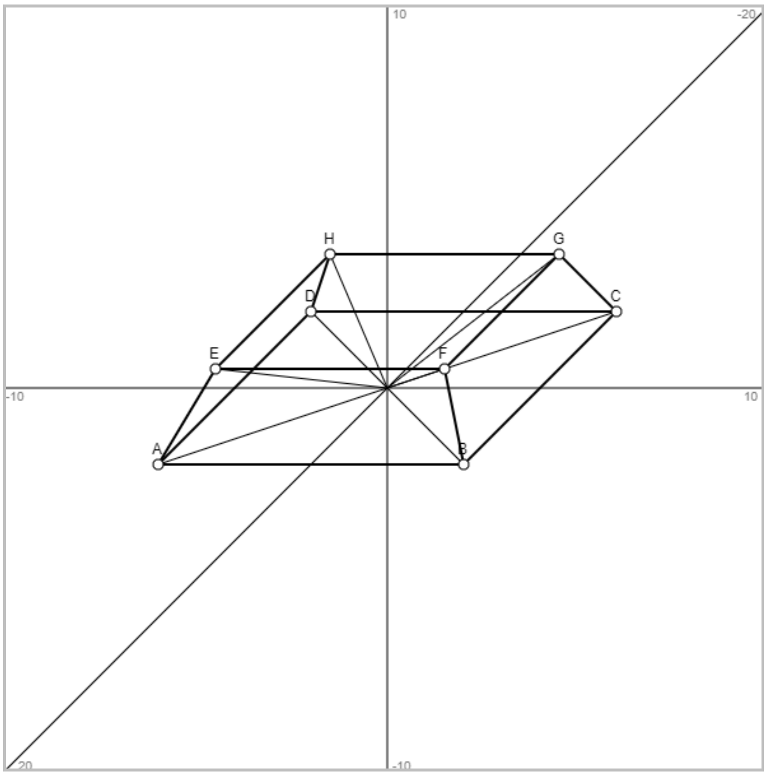
Mathematikaufgaben
> Vektorrechnung
> Pyramidenstumpf

Aufgabe: Der Pyramidenstumpf ABCDEFGH mit den Ecken A(4|-4|0), B(4|4|0), C(-4|4|0), D(-4|-4|0), E(3|-3|2), F(3|3|2), G(-3|3|2), H(-3|-3|2) ist Teil der quadratischen Pyramide ABCDS.

a) Bestimme die Spitze S der Pyramide, die den Pyramidenstumpf enthält.

b) Berechne das Verhältnis, in dem die Rauminhalte von Pyramidenstumpf und Pyramide zueinander stehen.

c) Berechne das Volumen des Pyramidenstumpfs.



Lösung: Wir verwenden zur Lösung der Teilaufgaben die Vektorrechnung.

a) Die Spitze S der den Pyramidenstumpf umfassenden quadratischen Pyramide ABCDS ist der Schnittpunkt von zwei <u>Geraden</u> g, h durch die Ecken A und E bzw. B und F. Mit A(4|-4|0), E(3|-3|2), B(4|4|0), F(3|3|2) folgt:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\left[\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

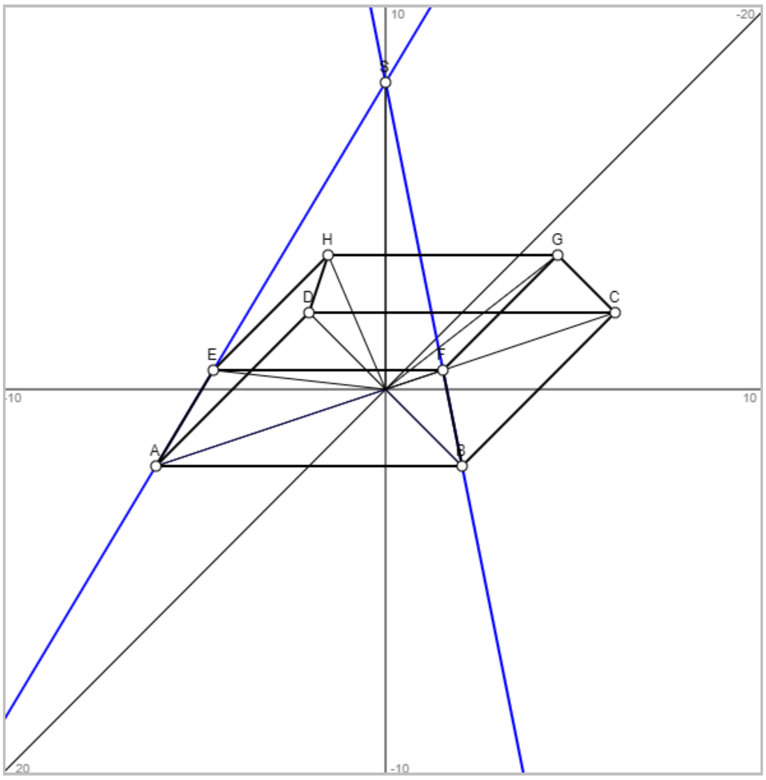
h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\left[\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Gleichsetzen der Geradengleichungen führt auf:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

und nach Vektorsubtraktionen in der Vektorgleichung auf:

$$r\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Das <u>lineare Gleichungssystem</u> mit den unbekannten Parametern r und s lässt sich dann mit dem Gauß-Algorithmus lösen:

<u>Anfangstableau</u>:

r	*s*	|	*R.S.*
-1	1	|	0
1	1	|	8
2	-2	|	0

<u>1. Schritt</u>: 1*(*2*) + 1*(*1*) / 1*(*3*) + 2*(*1*) /

-1	1	|	0
0	2	|	8
0	0	|	0

<u>2. Schritt</u>: (keine Umformung) /

-1	1	|	0
0	2	|	8
0	0	|	0

<u>Dreiecksgestalt des linearen Gleichungssystems</u>:

$$\begin{aligned} -1r + 1s &= 0 \\ +2s &= 8 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

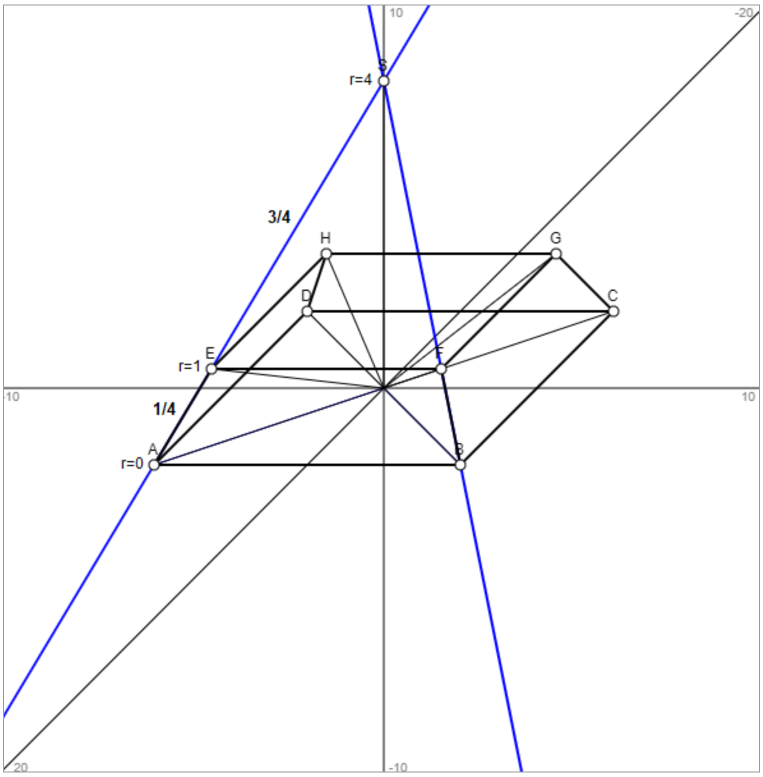
<u>Lösungen des linearen Gleichungssystems</u>:

s = 4
r = 4

Mit s = 4 erhalten wir eingesetzt in die Geradengleichung h die Pyramidenspitze S:

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$$ => S(0|0|8).

b) Betrachten wir nach a) die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, dann gehören zu den Ecken des Pyramidenstumpfes A und E die Parameter r=0 und r=1, zur Pyramidenspitze S der Parameter r=4.



Der Vektor $\vec{AS}$ wird also im Verhältnis $\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$ geteilt. Ist V_{ABCDS} das Volumen der quadratischen Pyramide ABCDS, V_{EFGHS} das Volumen der quadratischen Pyramide EFGHS, so muss daher gemäß den Strahlensätzen der Geometrie gelten:

$V_{EFGHS} = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot V_{ABCDS}$,

woraus als Rauminhalt V_{PSt} des Pyramidenstumpfes folgt:

$V_{PSt} = V_{ABCDS} - V_{EFGHS} = V_{ABCDS} - \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot V_{ABCDS} = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3\right) \cdot V_{ABCDS}$.

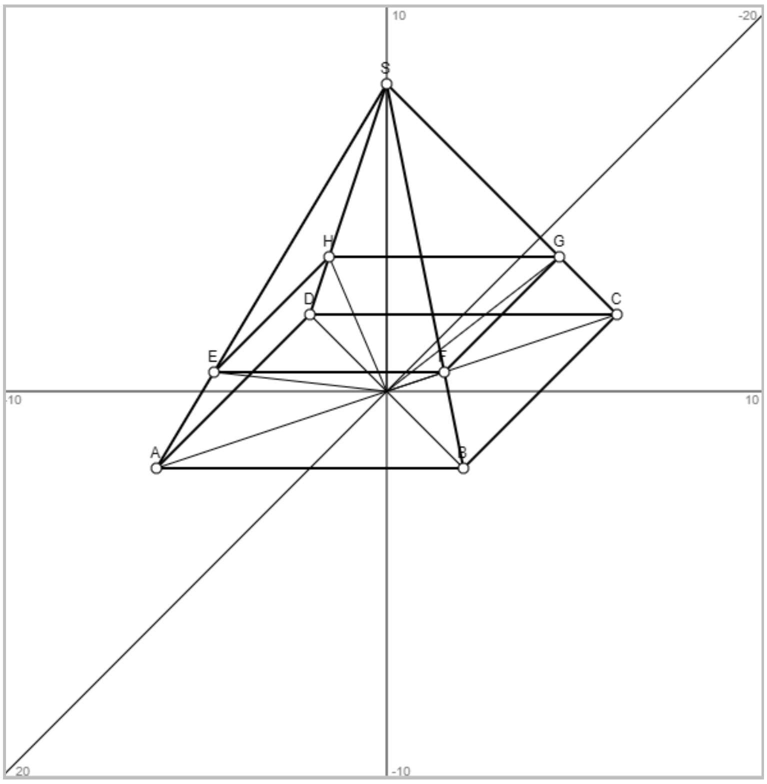
Das Verhältnis der Rauminhalte von Pyramidenstumpf zu Pyramide ist mithin:

$$\frac{V_{PSt}}{V_{ABCDS}} = \frac{\left(1-\left(\frac{3}{4}\right)^3\right) \cdot V_{ABCDS}}{V_{ABCDS}} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^3 = 1 - \frac{27}{64} = \frac{37}{64}.$$

Die Volumina von Pyramidenstumpf und Pyramide verhalten sich also wie: 37:64.

c) Das Volumen V_{ABCDS} der quadratischen Pyramide ABCDS können wir mit Hilfe des Spatprodukts ermitteln als:

$$V_{ABCDS} = \frac{1}{3}\left|(\vec{AB} \times \vec{AD}) \cdot \vec{AS}\right| = \frac{1}{3}\left|\left(\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-8\\0\\0\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\64\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\4\\8\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \cdot 512 = \frac{512}{3} \text{ VE.}$$



Nach b) gilt für das <u>Volumen des Pyramidenstumpfs</u>:

$$V_{PSt} = \frac{37}{64} \cdot V_{ABCDS} = \frac{37}{64} \cdot \frac{512}{3} = \frac{296}{3} \text{ VE.}$$

(VE = Volumeneinheit)

www.michael-buhlmann.de / 09.2020 / Aufgabe 1108